Einführung in die Physik des Atomkerns

H. Pose

ATOM KERN

H. Pose · Einführung in die Physik des Atomkerns

Einführung in die Physik des Atomkerns

von Dr. rer. nat. habil. Heinz Pose
Ordentlicher Professor an der
Technischen Universität Dresden

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
Berlin 1971

Verantwortlicher Lektor: Dipl.-Phys. G. Zahn
ES 18 B 7

Lizenz-Nr. 206 · 435/85/70
Satz und Druck: VEB Druckhaus „Maxim Gorki“, 74 Altenburg

VORWORT

Diese Einführung ist, nachdem kursmäßige Vorlesungen für alle Physikbeflissenen gehalten werden, aus Vorlesungen entstanden, die der Verfasser seit mehreren Jahren für alle Physikstudenten der Technischen Universität Dresden hält. Es kam hierbei nicht darauf an, eine möglichst umfassende Darstellung der Kernphysik zu schreiben — diese ist ja in dem dreibändigen „Lehrbuch der Kernphysik" von G. HERTZ und zahlreichen Monographien in russischer und englischer sowie französischer Sprache verfügbar —, sondern einen verständlichen Einblick in die Erkenntnisse auf diesem Gebiet zu geben. Daher wurde darauf verzichtet, experimentelle und theoretische Methoden eingehender zu behandeln, als es zum Verständnis der Physik bei den dargestellten Forschungsergebnissen notwendig ist.

Es war weiterhin zu bedenken, daß dem Studenten, der den Vorlesungskurs über Kernphysik hört, einige Erkenntnisse aus Quantenphysik und Atomphysik gerade erst vorgetragen worden sind. Dieses Wissen ist zwar noch frisch, aber noch nicht gefestigt. Aus diesem Grunde ist ein Teil mathematischer Ergänzungen, die der Verfasser jeweils auf Wunsch seiner Hörer der Vorlesung einfügte, in einem Anhang niedergelegt worden.

Bezüglich der Anordnung des Stoffes ist eine gewisse Tradition bereits vorhanden, und der Leser wird in dieser Hinsicht kaum wesentliche Neuerungen finden. Die Auswahl des Stoffes hat der Verfasser jedoch nach seiner Erfahrung im Lehrbetrieb mit Studenten unter Berücksichtigung seines eigenen Arbeitsgebietes getroffen.

In dieser und jeder fachlichen Frage stellt sich der Autor dem Kritiker, nicht ohne ihn für Anregungen und Verbesserungsvorschläge im voraus seiner Dankbarkeit zu versichern. Gedankt sei auch allen an der Fertigstellung des Buches beteiligten Mitarbeitern des Verlages und der Druckerei, insbesondere Frau Dipl.-Phys. G. Zahn und Frau H. Fischer für ihr verständnisvolles Eingehen auf meine Wünsche sowie für ihre Vorschläge und Hinweise.

Dresden, Dezember 1969 H. POSE

INHALTSVERZEICHNIS

Druckfehlerberichtigungen

Seite	Zeile	statt:	lies:
38	16 v. u.	$\frac{P_Y^2}{2M_K}$	$\frac{p_Y^2}{2M_K}$
43	21 v. o.	Tabelle 3	Tabelle 4
	22 v. o.	$\frac{\text{cm}}{\text{s}}\ \frac{\text{cm}}{\text{Volt}}\ \frac{1}{\text{Torr}}$	$\frac{\text{cm}}{\text{s}}\ \frac{\text{cm}}{\text{V}}\ \text{Torr}$
	6 v. u.	$2\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}\cdot\frac{E}{p}$	$2\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}\cdot\frac{p}{E}$
	4 v. u.	Millisekunden	Millisekunden pro Zentimeter
44	Tabelle 4	$p = 760\,\text{mm}$	$p = 760\,\text{Torr}$
219	6 v. u.	$V_2^S = V_1(M_1/M_1 + M_2)$	$V_2^S = V_1 M_1/(M_1 + M_2)$
220	7 v. u.	nach „Beschleuniger" ist einzufügen:	(sogenannter Speicherringe)
239	rechte Spalte	Van-de-Graff…	Van-de-Graaff…

EINLEITUNG

Die Vorstellung, daß im Atom die positive Ladung und der wesentliche Teil seiner Masse von den die positiven Ladungen kompensierenden negativen Ladungsträgern, den Elektronen, räumlich weit entfernt sind, wurde bereits im Jahre 1903 von LENARD bei seinen Versuchen über den Durchgang energiereicher Katodenstrahlen durch Materie konzipiert. Auf Grund seiner Versuche über die Streuung von α-Teilchen in Materie konnte RUTHERFORD im Jahre 1911 zu wesentlich weiteren Schlüssen gelangen und die grundlegenden Vorstellungen über den Bau der Atome entwickeln. Nach den Vorstellungen RUTHERFORDS, die zu außerordentlichen Erfolgen in der Atomphysik führten, sind praktisch die gesamte Masse und die positive Ladung des Atoms in einem Kern vom Radius der Größenordnung 10^{-12} cm konzentriert, während die Elektronen — man spricht von der „Elektronenhülle" — in einem Abstand, der etwa 10^5mal so groß wie der Kernradius ist, um den Kern herum angeordnet sind in einer Anzahl, die die Ladung Ze des Kerns (also ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung) kompensiert. Versuche von THOMSON zeigten weiterhin, daß Masse und Ladung des Atomkerns sich nicht gegenseitig bestimmen, sondern daß Kerne gleicher Ladung mit unterschiedlicher Masse, die als Isotope bezeichnet werden, und andererseits Kerne gleicher Masse, jedoch mit verschiedenen Ladungen, die Isobare, existieren.

Es zeigte sich bald, daß die Gesetze der klassischen Mechanik und Elektrodynamik nicht zu befriedigenden Vorstellungen bezüglich des Atombaues führen. Erst nachdem BOHR 1913 die Grundideen der Planckschen Quantentheorie mit dem Atommodell von RUTHERFORD in Verbindung gebracht hatte, gelang es, die Spektren der einfachsten Atomkonfigurationen — des atomaren Wasserstoffs und der Grundzustände des Heliums — mit großer Genauigkeit theoretisch zu interpretieren. Die Errechnung komplizierter Spektren, also solcher, die Atomen mit einer größeren Anzahl von Elektronen entstammen, stößt auf die bekannten Schwierigkeiten, die die Lösung von Mehrkörperproblemen mit sich bringt. Dies sei erwähnt, weil man in der Physik der Atomkerne ebenfalls im allgemeinen (mit Ausnahme des Deuterons) Mehr- oder Vielkörperprobleme zu behandeln hat. Während bei einer erheblichen Anzahl von Elementen das „Valenzelektron" durch die anderen Elektronen der Atomhülle nur wenig beeinflußt wird und daher deren Einfluß durch Störungskräfte — die insbesondere von BORN eingehend behandelt wurden — mit Erfolg berücksichtigt werden kann, ist es bei Atomkernen sehr viel schwieriger, verwandte Verfahren anzuwenden. Während bei der Atom-

hülle, bis auf Einflüsse durch den Spin und die sehr geringen Einwirkungen des Atomkerns (Isotope) auf die Spektren, mit den wohlbekannten elektromagnetischen Kräften gerechnet werden kann, sind die Verhältnisse bei Atomkernen sehr viel komplizierter, weil die Natur der Kernkräfte völlig andersartig ist und eine eindeutige Form für sie bisher nur innerhalb gewisser Grenzen bekannt ist.

Bevor wir uns den weiteren Ergebnissen der Forschung auf dem Gebiet der Kernphysik zuwenden, kehren wir noch einmal zu den oben erwähnten Erscheinungen der Isotopie und der Isobaren zurück. Nach mannigfachen Fehlversuchen zur Lösung dieser Fragen — man nahm anfänglich die Existenz von Protonen und Elektronen im Atomkern an — gelang im Jahre 1932 CHADWICK im Laboratorium von RUTHERFORD die Entdeckung eines ungeladenen Bestandteils der Atomkerne, des Neutrons. Unabhängig voneinander und gleichzeitig arbeiteten IWANENKO und HEISENBERG die Idee aus, daß die Atomkerne aus Protonen und Neutronen, deren Massen sich nur unwesentlich voneinander unterscheiden, bestehen.

Da, wie im Folgenden ausgeführt werden wird, das Verhältnis von Protonen- zu Neutronenzahlen sich innerhalb der Elemente des periodischen Systems etwas, jedoch nur wenig ändert, lassen sich durch halbempirische Beziehungen — Bethe-Weizsäcker-Formel — die Massen und Bindungsenergien der Atomkerne mit hoher Genauigkeit errechnen. Mit A bezeichnet man die Anzahl der Nukleonen eines Kerns, die gegeben ist durch $A = N + Z =$ Zahl der Neutronen plus Zahl der Protonen. Die wahre Masse des Kerns weicht wenig von der Ganzzahligkeit ab. Als „Nullpunkt“ für die Skala der Kernmassen wird die des Kohlenstoffisotopes ^{12}C gewählt, dessen Masse genau gleich 12 gesetzt ist. In der älteren Literatur wurde, anstelle von $^{12}C = 12$ das Sauerstoffisotop $^{16}O = 16$ gewählt. Hierauf ist bei der Ermittlung von Kernmassen aus Tabellenwerten zu achten.

1. GRUNDLAGEN DES KERNBAUS

1.1. Bestandteile der Atomkerne

Aus den Erscheinungen der natürlichen Radioaktivität, d. h. der Emission leichter und schwerer Teilchen (β- und α-Strahlen) beim Kernzerfall, hatte man ursprünglich geschlossen, daß in den Kernen Elektronen, Protonen und eventuell α-Teilchen vorhanden seien. Die quantentheoretischen Beziehungen führten jedoch zu anderen Ergebnissen. Innerhalb eines sehr kleinen Volumens vom Radius der Größenordnung 10^{-12} cm (10 Fermi) muß die Existenz schwerer und leichter Teilchen möglich sein. Nimmt man (für eine grobe Abschätzung) in der Heisenbergschen Unschärfebeziehung $\Delta p \, \Delta x \geqq \hbar$ als Δx den Kernradius R an, so entspricht der Impulsunschärfe Δp eine Energie, die gegeben ist durch

$$\Delta E \approx \sqrt{(\Delta p)^2 c^2 + m^2 c^4} - m c^2. \tag{1.1}$$

Betrachtet man die beiden Grenzfälle großer und kleiner Teilchengeschwindigkeiten, so erhält man für kleine v

$$\Delta E \approx \frac{1}{2m} (\Delta p)^2 \tag{1.2}$$

und für große v

$$E \approx c \, \Delta p. \tag{1.3}$$

Für schwere Teilchen wird sich der relativistische Effekt erst bei hohen Energien bemerkbar machen, da $M_p c^2$ für das Proton etwa 938 MeV beträgt. Demnach wäre aus der Beziehung für kleine v, also Protonen, zu folgern:

$$\Delta E \approx \frac{\hbar^2}{2 M R^2},$$

und es ergibt sich mit $R = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm

$$\Delta E \text{ (Proton)} \approx 2{,}5 \text{ MeV}.$$

Für Elektronen, deren Ruhenergie $m_e c^2 = 0{,}51$ MeV beträgt, ist der relativistische Fall der obenstehenden Beziehungen gültig. Es ergibt sich

$$\Delta E \text{ (Elektron)} \approx \frac{\hbar c}{R} \approx 70 \text{ MeV}.$$

Auf einen Raum mit Lineardimensionen der Kernradien eingeengt, hat das Elektron im Vergleich zum Proton eine fast 30mal größere „Nullpunktsenergie“. Die Bindungsenergien müßten daher größer als dieser Betrag sein. Das widerspricht der Erfahrung, denn die Bindungsenergien der Teilchen im Atomkern liegen in der Größenordnung von 7 bis 8 MeV.

Außer diesem Argument, das für die Abwesenheit leichter Teilchen in den Atomkernen spricht, existieren noch weitere. So lassen sich bei Vorhandensein von Elektronen im Atomkern die beobachteten Spinwerte zusammengesetzter Kerne nicht erklären. Nimmt man z. B. an, das Deuteron bestehe aus zwei Protonen und einem Elektron, so ist sein Spin vom Betrage 1 nicht zu erklären, da sowohl Protonen als auch Elektronen den Spin 1/2 besitzen.

Diese und weitere Argumente haben dazu geführt, als Bestandteile der Kerne lediglich Protonen und Neutronen (letztere sind ungeladene Teilchen von etwa der Masse des Protons) zu betrachten, eine Annahme, die durch zahlreiche Beobachtungen längst zur Gewißheit geworden ist.

1.2. Kernmassen und Kernbau

Aus den vorstehenden Ausführungen sind Informationen über die Kernladungen, die Kernradien und, damit zusammenhängend, über den Charakter der Kernkräfte sowie über die Zusammensetzung der Kerne aus Protonen und Neutronen zu entnehmen. Es läßt sich also der Aufbau der Kerne für die Elemente des periodischen Systems untersuchen. Die Kernmasse sollte demnach gleich der Summe der Massen aller Protonen und Neutronen des zu untersuchenden Kerns sein. Diese Kerne besitzen jedoch einen gewissen Energieinhalt, die Bindungsenergie, die aufgewendet wird, um die Nukleonen in einem stabilen Zustand zusammenzuhalten. Energie, Masse und Impuls des Kerns sind durch die relativistische Beziehung

$$\frac{E^2}{c^2} = (Mc)^2 + p^2 \tag{1.4}$$

miteinander verknüpft. Für stationäre Systeme, für die der Impuls $p = 0$ wird, erhält man nach EINSTEIN:

$$E = Mc^2. \tag{1.5}$$

Den energieärmsten möglichen Zustand eines Kernes nennt man seinen Grundzustand. Wie Gl. (1.5) zeigt, kann man aus der Masse des Kerns auf seine Energie schließen. Gegenwärtig lassen sich die Massen zahlreicher Kerne mit einer Genauigkeit bis zur 5. bzw. 6. Dezimalstelle bestimmen. Genaue Massenbestimmungen zeigten, daß die Kernmassen immer um einige Zehntel-Prozente kleiner sind als die Summe der Protonen- und Neutronenmassen, die den Kern bilden. Die Energie, die diesem Massenunterschied entspricht, wird die Bindungsenergie des Kerns

genannt. Sie ist gegeben durch

$$\varepsilon = -Mc^2 + (NM_n + ZM_p)\,c^2, \tag{1.6}$$

wo M die Masse des Kerns, M_n und M_p die Massen von Neutron und Proton, N und Z deren Anzahl im betreffenden Kern bedeuten.

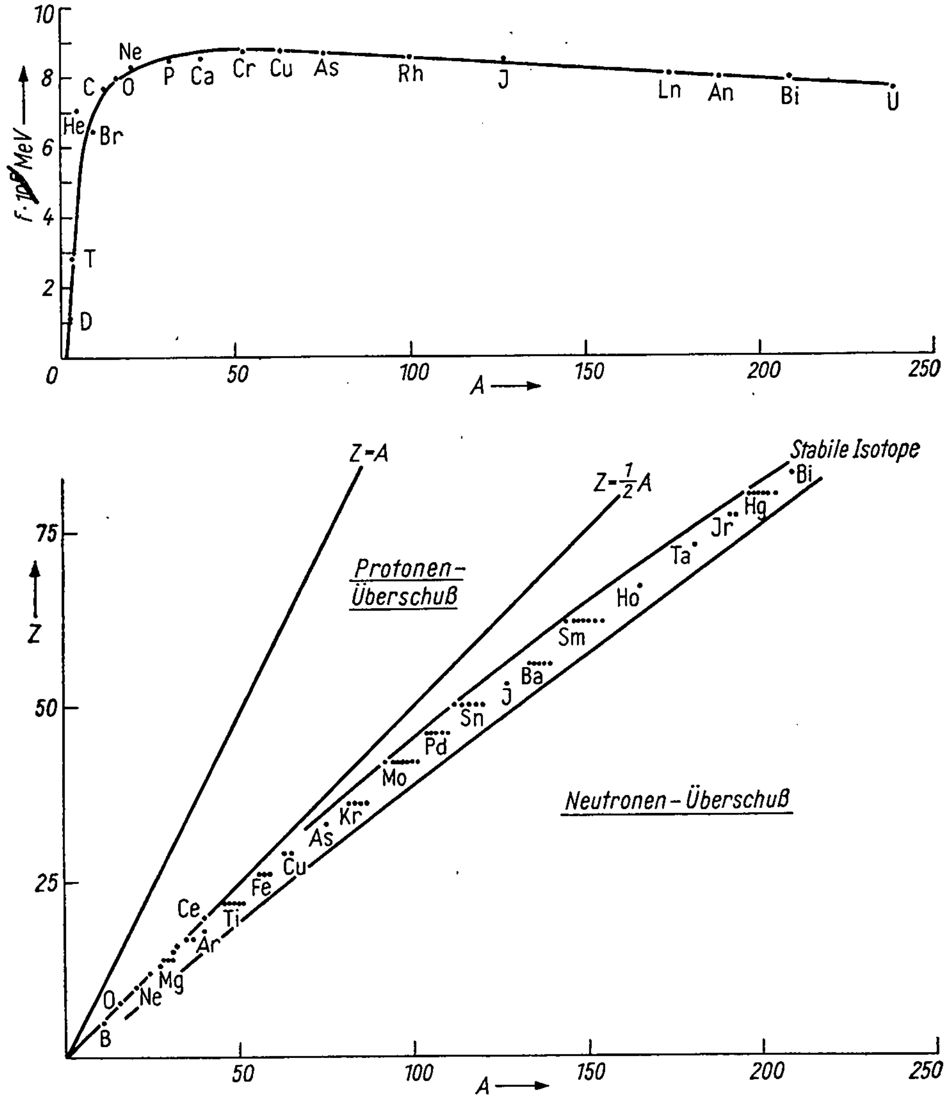


Abb. 1. Bindungsenergie eines Nukleons (oben) und Z—A-Verlauf der Elemente des periodischen Systems

Durch die Bindungsenergie wird die Arbeit bestimmt, die aufgewendet werden muß, um den Kern in seine Bestandteile, Protonen und Neutronen, zu zerlegen. Um die Stabilität des Atomkerns zu charakterisieren, ist es bequem, die Bindungsenergie f, die sich für ein Nukleon des Kerns ergibt, einzuführen. Für die Mehrzahl der Kerne liegt der Betrag von f zwischen 6 und 8 MeV.

Abb. 1 zeigt den Verlauf von f für die Elemente des periodischen Systems. Man ersieht aus der Darstellung, daß die Gesamtenergie ε für die Bindung eines Kernes annähernd proportional zur Zahl seiner Nukleonen ist, also zu A. Die geringen Abweichungen von dieser Proportionalität lassen sich durch Oberflächeneffekte, Coulomb-Wechselwirkung und einige andere Korrekturen, z. B. den Unterschied in der Anzahl von Protonen- und Neutronenzahlen, erklären. Qualitativ läßt sich der Zusammenhang von f und A durch die Annahme verstehen, daß die Kräfte zwischen den Nukleonen Sättigungscharakter besitzen, d. h., daß jedes Nukleon nur mit seinem nächsten Nukleon in Wechselwirkung kommen kann. Dieses Argument wird erhärtet durch die auf anderem Wege festgestellte Tatsache, daß die Kernkräfte eine außerordentlich kurze Reichweite besitzen.

Alle Kerne lassen sich in stabile und instabile (radioaktive) gruppieren. Die stabilen Kerne sind durch ein bestimmtes Verhältnis von Protonen- zu Neutronenzahl gekennzeichnet. Bei leichten Kernen sind beide Zahlen gleich, bei schweren Kernen überwiegt die Zahl der Neutronen die der Protonen.

Abb. 1 zeigt die Protonenzahl als Funktion der gesamten Kernmasse M. Die Lage der stabilen Isotope ist durch zwei begrenzende Kurvenzüge angedeutet. Wenn das Verhältnis N/Z von einem Wert, der für die Massenzahl charakteristisch ist, abweicht, wird der Kern instabil und zerfällt unter β-Strahlung. Aus dem Diagramm ist ersichtlich, daß ein Kern mit Neutronenüberschuß durch Übergang eines Neutrons in ein Proton unter Elektronen- und Neutrinoemission in eine stabilere Lage kommt. Ein Kern mit Protonenüberschuß erreicht die stabilere Lage durch den Übergang eines Protons in ein Neutron, wobei ein Positron und ein Neutrino emittiert werden.

Außer der Instabilität hinsichtlich eines β-Zerfalls beobachtet man eine solche hinsichtlich des Zerfalls in schwere Teilchen (α-Strahlung der natürlichen radioaktiven Kerne). Ein Kern ist instabil gegenüber dem Zerfall in schwerere Bruchstücke, wenn für ihn die Bindungsenergie pro Nukleon geringer ist als die Bindungsenergie pro Nukleon für die Bruchstücke. Alle schweren Kerne mit $A > 110$ sind instabil in bezug auf Spaltung, wenn noch einige andere Erhaltungsgesetze erfüllt sind. Die Wahrscheinlichkeit für eine derartige, spontane, Spaltung ist jedoch sehr gering.

1.3. Tröpfchenmodell (Modell der unabhängigen Teilchen)

Aus experimentellen Ergebnissen folgt, daß die Atomkerne (bis auf wenige Ausnahmen) annähernd Kugelform haben. Ihre Volumina sind direkt proportional der Massenzahl A, also der Nukleonenzahl. Der Kern kann ähnlich dem Tropfen einer inkompressiblen Flüssigkeit sehr hoher Dichte $\varrho \approx 10^{14}$ g/cm^3 behandelt werden.

Aus der Unschärferelation folgt für die kinetische Energie eines Teilchens, das sich in einem Volumen der Kantenlänge d befindet,

$$d\,\Delta p = \hbar; \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2m}(\Delta p)^2 = \frac{1}{2m}\frac{\hbar^2}{d^2}. \tag{1.7}$$

Für einen Kern mit A Nukleonen erhält man

$$E_{\text{kin}} = A\,\frac{\hbar^2}{2md^2}. \tag{1.8}$$

Als Kräftefunktion für die Anziehung zwischen zwei Nukleonen sei ein Potential $U(r)$ sehr kurzer Reichweite gewählt, beispielsweise das Yukawa-Potential

$$U(r) = \frac{q^2}{r}\,e^{-kr}. \tag{1.9}$$

Die Größe q bedeutet nicht, wie in der Elektrostatik, eine Ladung. Sie bestimmt jedoch, ähnlich wie im Coulomb-Gesetz, die Quantität der Kernkräfte. Für A Nukleonen im Atomkern wird $Q = Aq$.

Der zu betrachtende Kern enthalte N Neutronen und Z Protonen. Im Kern existieren elektrisch geladene Teilchen, Protonen, und ungeladene Teilchen, Neutronen. Wie durch das Yukawa-Potential gezeigt wurde, haben Kernkräfte eine sehr kurze Reichweite, die in der Größenordnung von 10^{-13} cm liegt (10^{-13} cm $= 1$ Fermi).

Jedes Teilchen kann daher nur mit seinen unmittelbaren Nachbarn in Wechselwirkung stehen. Das führt zu einer Absättigung der Kernkräfte. Wenn schließlich jedes einzelne Nukleon mit allen anderen Nukleonen des Kerns wechselwirken könnte, dürfte die Bindungsenergie der Kerne im periodischen System der Elemente nicht proportional zu A sein (Abb. 1), sondern proportional zu $\frac{1}{2}\,A\,(A-1)$, wie leicht zu errechnen ist. Weiterhin zeigt der später (Kap. 8.2.) einzuführende Begriff des Isospins, daß die Kernkräfte von der elektrischen Ladung der Nukleonen unabhängig sind.

Auf Grund dieser Überlegungen, gestützt durch experimentelle Beobachtungen, entwickelte Weizsäcker die nach ihm benannte Formel für die energetischen Beziehungen zwischen Atomkernen verschiedener Protonen- und Neutronenzahl. Entsprechend den obenstehenden Ausführungen enthält die Gesamtenergie eines Kerns ein Glied αA, wobei, da es sich um anziehende Kräfte zwischen den A Nukleonen handelt, α eine negative Größe bedeutet.

An der Oberfläche des Kerns ist zu berücksichtigen, daß die dort befindlichen Nukleonen nur einseitig mit ihren Nachbarn wechselwirken. Da die Kernoberfläche durch $4\pi R^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$ gegeben ist, erhält man eine Anzahl von Nukleonen, deren Bindungsenergie proportional der Kernoberfläche ist und demnach eine geringere Volumenenergie für den Kern liefert als die im Innern des Kerns vorhandenen Nukleonen. Mit einer dem Experiment zu entnehmenden Konstanten ergibt sich der Oberflächenanteil der Bindungsenergie zu $\gamma A^{2/3}$, ein Ausdruck mit positivem Vorzeichen, denn die Oberflächenbindung verringert die Bindungsenergie der Nukleonen.

Da ein Teil der Nukleonen (bei den leichteren Elementen $A/2$) aus Protonen, also positiv geladenen Teilchen, besteht, sind weiterhin die abstoßenden Coulomb-Kräfte in Rechnung zu setzen. Die elektrischen Kräfte haben eine wesentlich geringere Abhängigkeit vom Abstand der Ladungsträger ($U(r) \sim 1/r$), so daß alle Protonen im Kern sich gegenseitig beeinflussen. Eine isotrop mit der Ladung Ze angefüllte Kugel besitzt die elektrostatische Energie $E_{st} = (3/5)Z^2e^2/R$. Da $R = r_0 A^{1/3}$ ist, erhält man

$$E_{st} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{r_0 A^{1/3}} . \tag{1.10}$$

Ein Atomkern ist jedoch durch die obenstehenden Betrachtungen noch nicht vollständig beschrieben. Die Stabilität der leichten Elemente, bei denen $N = Z$ ist, zeigt, daß bei den geringen Coulomb-Kräften dieser Elemente die wesentliche Rolle für deren Aufbau die kurzreichenden Kernkräfte spielen. Das ändert sich, wie Abb. 1 zeigt, mit wachsendem A, wenn nämlich die Zahl der Neutronen die der Protonen übersteigt. Zu der Weizsäcker-Gleichung ist, wie nähere Betrachtungen zeigen, noch ein Glied hinzuzufügen, das die Differenz von N und Z enthält. Dieses Glied, das Symmetrieglied, muß, da es die Bindungsenergie verringert, positiv sein und hat die Größe $\beta(N - Z)^2/A$, wo β eine dem Experiment zu entnehmende Konstante ist. Für die Masse eines Kerns mit Z Protonen und N Neutronen hat man, nach den vorstehenden Ausführungen, folgende Größe erhalten:

$$M = NM_n + ZM_p - \alpha A + \beta \frac{(N - Z)^2}{A} + \gamma A^{2/3} + \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{r_0 A^{1/3}} . \tag{1.11}$$

Mit Hilfe der experimentell bestimmten Konstanten α, β und γ erhält man für die negative Bindungsenergie eines Atomkerns

$$B = \left[15{,}75\, A - 23{,}7\, \frac{(N - Z)^2}{A} - 17{,}8\, A^{2/3} - 0{,}71\, Z^2 A^{-1/3} \right] \text{MeV.*)} \tag{1.12}$$

Für Kerne mit ungeradem A gibt diese Formel nicht nur bei stabilen, sondern auch bei instabilen Kernen deren Bindungsenergien (bzw. Massen) mit erheblicher Genauigkeit wieder (Tab. 1). Kerne mit geraden N- und Z-Werten und solche mit den entsprechenden ungeraden Werten zeigen jedoch Abweichungen von der obenstehenden Formel. Die experimentellen Resultate ergaben, daß Kerne mit geradzahligen N und Z die größte Stabilität besitzen. Stabile Kerne mit ungeraden N- und Z-Werten existieren nur viermal im periodischen System, nämlich ${}^2_1H$, ${}^6_3Li$, ${}^{10}_5B$ und ${}^{14}_7N$. Weiterhin haben Kerne mit geradzahligen N und Z ausnahmslos den Gesamtspin Null. Unserer Formel für die Bindungsenergie fehlt demnach

*) Die Zahlenwerte für die Konstanten in der Gleichung sind neueren Arbeiten entnommen, bei denen der Einfluß der Schalenstruktur der Atomkerne in Rechnung gesetzt wurde (z. B. A. Cameron, Canad. Journ. Phys *35* (1957), 1021).

noch ein Glied, das den Paarungseffekt der Nukleonen berücksichtigt. Dieses Glied ist gleich Null für ungerade A, positiv für Kerne mit geraden N und Z (gg-Kerne), da deren Bindungsenergie höher ist, negativ für Kerne mit ungeraden N und Z (uu-Kerne), deren Bindungsenergie geringer ist. Man erhält für die Kernmassen:

$$M = \left[Z m_p + (A - Z) m_n - \alpha A + \beta \frac{(N - Z)^2}{A} + \gamma A^{2/3} + \frac{Z^2 e^2}{r_0 A^{1/3}} - \delta \right] \tag{1.13}$$

$$\delta = \begin{cases} + |\delta| & \text{für gg-Kerne,} \\ 0 & \text{für ungerade } A, \\ - |\delta| & \text{für uu-Kerne;} \end{cases} \qquad \delta = 34\, A^{-3/4}\ \text{MeV}.$$

Durch Differentiation der Gl. (1.12) nach Z erhält man für konstante $A = N + Z$, also für Isobare, folgende Gleichung:

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = 94{,}8 - 94{,}8 \frac{2Z}{A} - 1{,}42\, A^{-1/3} Z. \tag{1.14}$$

Für die stabilste Zusammensetzung des Kerns, $\partial B / \partial Z = 0$, erhält man

$$(N - Z)_0 = A \frac{0{,}71 A^{2/3}}{94{,}8 + 0{,}71\, A^{2/3}}. \tag{1.15}$$

Die Kerne größter Stabilität enthalten daher einen Überschuß an Neutronen, der mit wachsendem A zunimmt. Die Genauigkeit der Massenbestimmung mittels Gl. (1.12) ist durch einige Beispiele der Tabelle 1 belegt. Es ist ersichtlich, daß, außer bei den leichten Kernen, die Differenz zwischen errechneten und gemessenen Werten in der Größenordnung von Promillen liegt. Einigermaßen erstaunlich ist

Tabelle 1.

Kern	Bindungsenergie MeV exp.	theor.	Häufigkeit %
$^{12}_{6}C$	92,163	89,80	98,9
$^{14}_{7}N$	104,659	94,97	99,64
$^{27}_{13}Al$	224,953	224,2	100
$^{40}_{18}Ar$	343,812	345,8	99,6
$^{40}_{20}Ca$	342,1	345,8	96,92
$^{75}_{33}As$	652,568	655,6	100
$^{92}_{42}Mo$	796,51	795,5	15,86
$^{95}_{42}Mo$	821,63	820,0	15,6
$^{96}_{42}Mo$	830,79	830,7	16,5
$^{98}_{42}Mo$	846,25	847,8	23,75
$^{127}_{53}J$	1072,59	1071	100
$^{197}_{74}Au$	1559,43	1557	100
$^{235}_{92}U$	1783,9	1788	0,72
$^{238}_{92}U$	1801,73	1800,7	99,28

es, daß verhältnismäßig einfache, klassische Vorstellungen mit erheblicher Genauigkeit die Bindungsenergien der Kerne des periodischen Systems wiedergeben können. Bei genauerer Betrachtung erweist es sich jedoch, daß die experimentell beobachteten Werte für die Bindung der Nukleonen in den Atomkernen nicht statistisch schwanken oder sich gegenüber den experimentellen Werten stetig mit einer der charakteristischen Größen — Nukleonenzahl oder Protonenzahl — ändern, sondern daß unstetige Abweichungen zwischen experimentellen und theoretischen Werten für die Bindungsenergien der Kerne auftreten. Derartige Unstetigkeiten treten bei bestimmten Zahlen von Protonen und Neutronen, den sogenannten „magischen Zahlen", z. B. bei den Protonen- oder Neutronenzahlen 20, 28, 50 und 82, auf. Bei den Betrachtungen über das Schalenmodell der Atomkerne wird auf die Bedeutung dieser Zahlen näher eingegangen werden.

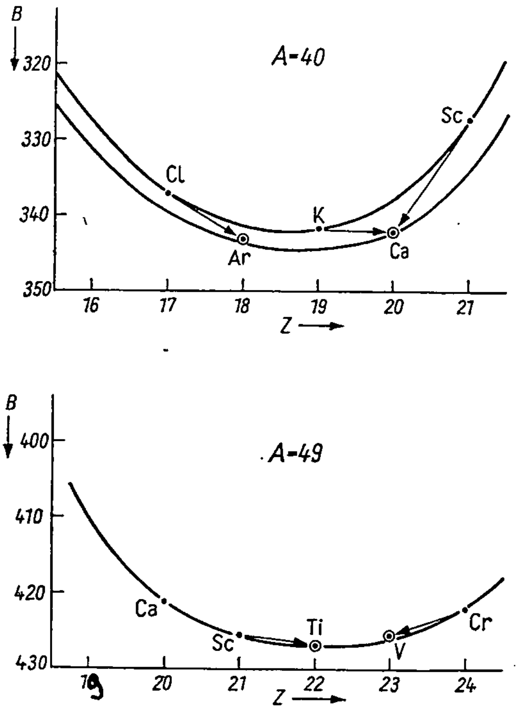


Abb. 2. Zwei Isobarendiagramme als Beispiele für gerade und ungerade Nukleonenzahl

Betrachtet man weiterhin Gl. (1.12), und zwar die Abhängigkeit der Bindungsenergie von Z bei konstantem A, also für Isobare, so erkennt man, daß die Bindungsenergie hyperbolisch von Z abhängt. Da für ug-Kerne das δ-Glied Null wird, erhält man eine Hyperbel, während sich für gg- oder uu-Kerne zwei Hyperbeln ergeben, da einmal bei der Änderung von Z um eine Einheit ein gg-Kern in einen uu-Kern übergeht (und umgekehrt ein uu- in einen gg-Kern), zum anderen gg- und uu-Kerne verschiedene Vorzeichen des δ-Gliedes besitzen. Für zwei Beispiele, $A = 40$ und $A = 49$, ist dieses Verhalten in Abb. 2 dargestellt. Der Wert

der größten Bindungsenergie, nach Gl. (1.15) zu berechnen, ist im allgemeinen nicht für ganzzahlige Z-Werte gegeben. Daher besteht vielfach die Möglichkeit, daß zwei oder mehr Isobare stabil sind, jedoch nur so wenig voneinander verschiedene Bindungsenergien besitzen, daß die Emission eines Elektrons oder Positrons nicht möglich ist. (Außer der Energiebilanz sind, wie früher erwähnt, noch Erhaltungsregeln für Spin, Isospin und Parität zu erfüllen.)

Die vorstehenden Betrachtungen gestatten es, zahlreiche Züge des Kernbaus zu verstehen und eine Reihe von allgemeinen Erscheinungen vorauszusagen. Eine Anzahl periodischer Änderungen im Kernbau wird jedoch nicht wiedergegeben. Hierzu bedarf es eingehenderer Untersuchungen hinsichtlich der Gruppierung von Protonen und Neutronen innerhalb der Kerne des periodischen Systems. Mit Hilfe des „Schalenmodells" des Kerns, das, wie sein Name ausdrückt, Gruppierungen von Nukleonen annimmt, lassen sich weitere Eigenschaften des Kernbaus, insbesondere das Auftreten der sogenannten „magischen Zahlen", erklären.

1.4. Spin, magnetisches Moment und Quadrupolmoment

Entsprechend den Gesetzen für Mikroteilchen sind die mechanischen Größen der Nukleonen im Atomkern quantenphysikalisch zu behandeln. Analog zu den Zuständen der Elektronen in der Atomhülle werden die Nukleonen im Atomkern durch zwei Drehimpulse charakterisiert, den Bahndrehimpuls und den Eigendrehimpuls oder Spin. In Einheiten $h/2\pi = \hbar$ (h ist die Plancksche Konstante) hat der Spin der Nukleonen und der Elektronen den Wert $p_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}$ mit $s = 1/2$; abkürzend spricht man vom Spin 1/2. Ebenfalls in Einheiten $\hbar$ wird der Bahndrehimpuls ausgedrückt; er hat also die Werte $p_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$, wo l ganzzahlig ist. Auch hier schreibt man einfach: Drehimpuls l.

Bahndrehimpuls und Spin werden vektoriell addiert:

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{s}; \qquad j = l \pm 1/2.$$

Der gesamte Drehimpuls eines Atomkerns ist gegeben durch

$$\boldsymbol{J} = \sum \boldsymbol{l} + \sum \boldsymbol{s} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}.$$

Für Kerne mit gerader Nukleonenzahl wird S ganzzahlig, für solche mit ungerader Nukleonenzahl halbzahlig. Da die Spins der Nukleonen eines Kerns im allgemeinen eine antiparallele Lage als energetisch günstigste einnehmen, sind die Gesamtspins der Kerne im allgemeinen klein. Alle gg-Kerne haben den Spin $S = 0$.

Im Atommodell von Bohr und Sommerfeld erzeugen die auf ihren Bahnen rotierenden Elektronen magnetische Dipolmomente. Diese setzen sich aus zwei Anteilen zusammen, dem Spindipolmoment $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2mc}$ und dem Bahndipolmoment vom Betrage $l\,\mu_B$, wenn $l\hbar$ der Bahndrehimpuls ist. Da für Atomkerne ebenfalls Eigen- und Bahndrehimpulse existieren, besitzen Kerne auch ein magnetisches Dipolmoment.

Bedeutet $\varrho(r)$ die Dichte und $v(r)$ die Rotationsgeschwindigkeit einer elektrischen Ladung, so erhält man aus den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik für das magnetische Moment des Volumens Ω:

$$\mu = \frac{1}{2c} \int_\Omega \varrho(\boldsymbol{r}) \, [\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})] \, d\tau. \tag{1.16}$$

Hat das rotierende Teilchen die Masse M und die Ladung e, so folgt für den Drehimpuls, wenn innerhalb des Volumens Ω Masse und Ladung gleichartig verteilt sind:

$$\boldsymbol{J}\hbar = \frac{M}{e} \int_\Omega \varrho(\boldsymbol{r}) \, [\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})] \, d\tau. \tag{1.17}$$

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$\mu = \mu_0 \boldsymbol{J}, \quad \text{wobei} \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2Mc}. \tag{1.18}$$

Bedeutet M die Masse des Nukleons, so nennt man μ_0 das „Kernmagneton".

Die Momente der Kerne sind jedoch komplizierter, als Gl. (1.18) angibt. Unter anderem ist die Ladungsverteilung etwas anders, als die Massenverteilung; auch fehlt beim Neutron eine resultierende Ladung. An Stelle der Beziehung (1.18) schreibt man

$$\mu = g \mu_0 \boldsymbol{J}. \tag{1.19}$$

Der Faktor g wird gyromagnetisches Verhältnis oder Kern-g-Faktor genannt. Tabelle 2 zeigt die g-Werte für einige Kerne.

Da im Kern nur positive Ladungen vorhanden sind, kann ein elektrisches Dipolmoment nicht auftreten. Bei Abweichungen der Ladungsverteilung von der Kugelform ergeben sich jedoch Abweichungen vom Feld einer einfachen Punktladung, die sich rechnerisch angenähert durch ein Quadrupolmoment darstellen lassen. Ein Rotationsellipsoid mit der homogen verteilten Ladung Ze besitzt das Quadrupolmoment

$$M = \frac{2}{5} Ze(b^2 - a^2), \tag{1.20}$$

wobei b und a die beiden Achsen des Rotationsellipsoids sind; b ist die Rotationsachse. Man setzt $M = eQ$ und bezeichnet als Quadrupolmoment

$$Q = \frac{2}{5} Z(b^2 - a^2). \tag{1.21}$$

Ein verlängertes Rotationsellipsoid hat $Q > 0$, ein abgeplattetes $Q < 0$. Tabelle 2 zeigt für einige Kerne die ermittelten Quadrupolmomente. Die gg-Kerne haben kein Quadrupolmoment, ebensowenig die Kerne mit $J = 1/2$.

Tabelle 2

Kern	J	$\frac{\mu}{\mu_0}$	g	Q Barn
p	1/2	2,79	5,58	—
n	1/2	−1,91	−3,82	—
^2H	1	0,86	0,86	+0,0028
^3_2He	1/2	−2,13	−4,2	—
^9_4Be	3/2	−1,177	−0,78	+0,02
$^{23}_{11}Na$	3/2	+2,22	1,48	+0,11
$^{27}_{13}Al$	5/2	+3,64	1,46	+0,15
$^{35}_{17}Cl$	3/2	+0,82	0,55	−0,08
$^{85}_{37}Rb$	5/2	+1,35	0,54	+0,30
$^{109}_{47}Ag$	1/2	−0,13	−0,26	—
$^{167}_{68}Er$	7/2	+0,5	0,14	+10,2
$^{201}_{80}Hg$	3/2	−0,61	−0,41	−0,67
$^{209}_{83}Bi$	9/2	+4,04	0,87	−0,40

Zur Bestimmung von Ladung und Masse der Atomkerne nutzt man im wesentlichen die Wechselwirkung der Kerne mit elektrischen und magnetischen Feldern. Die hierzu entwickelten Methoden (Thomson, Aston, Bainbridge, Mattauch u. a.) sind sowohl theoretisch-physikalisch als auch technisch wachsend komplizierter geworden. Die Bestimmung der Spins und der magnetischen Momente erfolgte auf anderen Wegen. Der Kernspin und die mit ihm verbundenen magnetischen Momente führen zu Anteilen an den Kernkräften, die nicht mehr zentralsymmetrisch sind. Zur Ermittlung von Spin und Parität vergleiche Anhang V.

Der Einfluß von Kernspin und Kernmagneton äußert sich in einer — sehr geringen — Aufspaltung der Spektrallinien. Da, wie oben dargestellt wurde, Spin und magnetisches Moment sowie Bahndrehimpuls und magnetisches Moment miteinander verbunden sind,

$$\mu_l = l\,\frac{eh}{2mc} = l M_B \quad \text{und} \quad \mu_s = 2s\, M_B, \tag{1.22}$$

ergibt sich als summarisches magnetisches Moment

$$\mu_j = \mu_s + \mu_l \quad \text{bzw.} \quad \mu_J = \mu_S + \mu_L. \tag{1.23}$$

Die Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Moment des Kerns und dem magnetischen Feld, das von den Elektronen der Atomhülle herrührt, führt zu einer Wechselwirkungsenergie

$$U = -\mu_{\text{Kern}}\, \boldsymbol{H}_{\text{Elektr}}.$$

Die Hyperfeinstruktur der Wismutlinie $\lambda = 4722$ Å äußert sich durch eine Aufspaltung in sechs Linien mit dem Abstand $\Delta\lambda \approx 0{,}05$ Å. Aus der Anzahl der Linien, ihren Intervallen und Intensitätsverhältnissen läßt sich die Größe des Kernspins und seines magnetischen Moments ermitteln.

Bei der Verwendung äußerer magnetischer Felder gerät das magnetische Moment μ_K des Kerns sowohl mit dem Magnetfeld $\boldsymbol{H}_e$ der Elektronen aus der Atomhülle als auch mit dem äußeren Magnetfeld in Wechselwirkung. Die Energie dieser Wechselwirkungen ergibt sich zu

$$U = \mu_K (\boldsymbol{H}_e + \boldsymbol{H}).$$

Man hat in diesem Falle zu unterscheiden zwischen den Effekten bei schwachen äußeren Magnetfeldern, also solchen, die klein gegen die inneren Magnetfelder $\boldsymbol{H}_e$ sind, und den Effekten bei starken Feldern, die groß sind im Vergleich zu $\boldsymbol{H}_e$. Im ersten Falle erhält man den aus der Optik bekannten Zeeman-Effekt, im zweiten Falle den ebenfalls aus der Optik bekannten Paschen-Back-Effekt. In beiden Fällen lassen sich μ_K und damit auch der Spin des zu untersuchenden Kerns ermitteln.

Die Methode der Ablenkung von Molekularstrahlen durch inhomogene magnetische Felder ist aus der Optik als Stern-Gerlach-Versuch bekannt. Im Falle des inhomogenen Magnetfeldes wirken ponderomotorische Kräfte auf das magnetische Moment des Atoms, so daß eine Ablenkung des Strahles stattfindet. Die Kraftwirkung $\boldsymbol{F} = \mu \operatorname{grad} \boldsymbol{H} \cdot \cos(\mu, \boldsymbol{H})$ ist im Falle der Kernmagnetonen außerordentlich gering. Das bietet naturgemäß für das Experiment erhebliche Schwierigkeiten. Dennoch gelang es STERN, ESTERMANN und FRISCH, das magnetische Moment des Protons mit einer Genauigkeit von etwa 10% zu messen.

Die Schwierigkeiten, die der Stern-Gerlach-Versuch bei der Bestimmung von Kernmomenten bietet, wurden in sehr eleganter und scharfsinniger Weise durch RABI gelöst, dessen erste Anordnungen bereits im Jahre 1936 entwickelt wurden. Das Schema der Anordnung zeigt Abb. 3. Die Idee von RABI ist folgende:

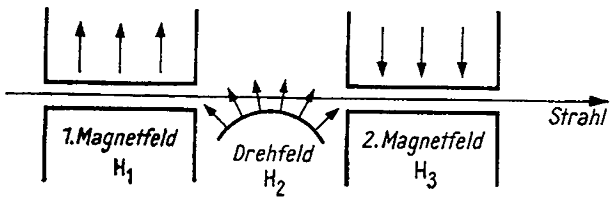


Abb. 3. Schema der Anordnung von RABI zur Bestimmung der Kernmomente

Der zu untersuchende Atomstrahl kommt in ein erstes, inhomogenes Magnetfeld H_1 mit dH_1/dz, wird dort in bekannter Weise abgelenkt, durchsetzt dann ein homogenes Magnetfeld H_2 und schließlich ein drittes Magnetfeld H_3, dessen Inhomogenität gleichgroß und entgegengesetzt gerichtet dem Gradienten von H_1 ist. Auf diese Weise erhält man, da in dem mittleren Feld H_2 keine Ablenkung, sondern nur eine Präzessionsbewegung des Gesamtmomentes um die magnetischen Kraftlinien statthat, keine Ablenkung des Strahles. Senkrecht zu den Kraftlinien des Magnetfeldes H_2 wird ein Wechselfeld hoher Frequenz (etwa von der Größenordnung der Radiofrequenzen) gelegt. Stimmt nun die Hochfrequenz mit der Frequenz der Präzessionsbewegung überein, so klappen die magnetischen Kern-

dipole in die Richtung des Magnetfeldes H_2 um. Die Umorientierung der Dipole hat zur Folge, daß das Mischungsverhältnis der Orientierungen, das im Feld H_1 vorhanden war, sich im Feld H_2 ändert und somit im Feld H_3 ein anderes Mischungsverhältnis der Orientierungen vorhanden sein wird, so daß die Ablenkung durch $\mathrm{d}H_1/\mathrm{d}z$ im Feld H_3 nicht mehr kompensiert werden kann. Diese Methode gestattete die genaueste Bestimmung der Kernmomente.

Abschließend sei noch bemerkt, daß die genannten Methoden nicht geeignet sind, das magnetische Moment eines Neutrons zu bestimmen. Es gelingt nicht, genügend intensive und feine Strahlen von Neutronen herzustellen. Im Jahre 1936 hat Bloch eine Methode entwickelt, die darauf beruht, die Absorption von Neutronen durch stark magnetisierte ferromagnetische Materialien zu messen. Zu der gewöhnlichen Wechselwirkung der Neutronen mit Atomkernen tritt hier eine zusätzliche Orientierung ihrer magnetischen Momente, die zu einer „Polarisation“ führt. Durch eine zweite ferromagnetische Schicht kann der Betrag dieses Polarisationseffektes analysiert und die Größe des magnetischen Moments bestimmt werden. Die Anbringung eines konstanten magnetischen Längsfeldes zwischen dem ersten Ferromagnetikum (Polarisator) und dem zweiten (Analysator) und eines elektromagnetischen Hochfrequenzfeldes verursacht, wie oben gezeigt wurde, eine Umorientierung der magnetischen Momente bei den die Anordnung durchlaufenden Neutronen. Die Genauigkeit derartiger Messungen (deren eingehende Beschreibung hier zu weit führen würde) ist sehr hoch, so daß sich das magnetische Moment des Neutrons,

$$\mu_\mathrm{n} = -1{,}913148\,\mu_\mathrm{B},$$

auf sieben Stellen genau angeben läßt.

2. RADIOAKTIVER ZERFALL

2.1. Zerfallsgesetz

Der zeitliche Ablauf des Zerfalls eines radioaktiven Elementes ist durch äußere Maßnahmen nicht beeinflußbar. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Kern innerhalb des Zeitintervalles $\mathrm{d}t$ zerfällt, ist bestimmt durch eine Konstante λ, die für jedes radioaktive Element charakteristisch ist. Die Zerfallswahrscheinlichkeit für einen gegebenen Kern ist demnach $\lambda\,\mathrm{d}t$. Enthält die Substanz N Kerne, so wird die Zahl der im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ zerfallenden Kerne

$$\mathrm{d}N = -N\lambda\,\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

Durch Integration erhält man $N = N_0 e^{-\lambda t}$, wobei λ die Zerfallskonstante genannt wird. Von praktischer Bedeutung für den Experimentator ist weiterhin die Zeit T, nach deren Verlauf die Zahl N_0 der anfänglich vorhandenen Kerne auf die Hälfte reduziert ist, also

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0\,e^{-\lambda t}; \qquad T = \frac{1}{\lambda} \ln 2. \tag{2.2}$$

Die radioaktiven Elemente zerfallen vielfach in Folgeprodukte, die ebenfalls radioaktiv sind. Ist die Muttersubstanz langlebig im Vergleich zur Tochtersubstanz, so stellt sich ein Gleichgewicht der Folgeprodukte ein, bei dem von jeder Kernart pro Zeiteinheit ebensoviel zerfällt wie neu entsteht. Bezeichnet man die Muttersubstanz mit dem Index 0, die Tochtersubstanz mit dem Index 1, so ist der Zuwachs von N_1 durch den Zerfall von N_0 gegeben:

$$\mathrm{d}N_1 = N_0\lambda_0\,\mathrm{d}t \quad \text{(positives Vorzeichen, da } N_1 \text{ mit } t \text{ zunimmt)}. \tag{2.3}$$

Da N_1 wiederum zerfällt, beträgt die Abnahme durch Zerfall

$$\mathrm{d}N_1' = -N_1\lambda_1\,\mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

Im Gleichgewicht wird $\mathrm{d}N_1 + \mathrm{d}N_1' = 0$, also

$$N_0\lambda_0 = N_1\lambda_1 \quad \text{oder} \quad N_0/N_1 = T_0/T_1. \tag{2.5}$$

Für eine größere Anzahl von Tochtersubstanzen gilt analog $\lambda_0 N_0 = \lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \ldots$ im Falle des Gleichgewichtszustandes. Diese Beziehungen sind

insbesondere für die Bestimmung der Lebensdauern bzw. Halbwertszeiten von sehr langlebigen Substanzen wichtig.

Bevor wir uns anschließend mit den Eigenschaften der radioaktiven Zerfälle beschäftigen, betrachten wir als Beispiel einer Zerfallsreihe natürlicher radio-

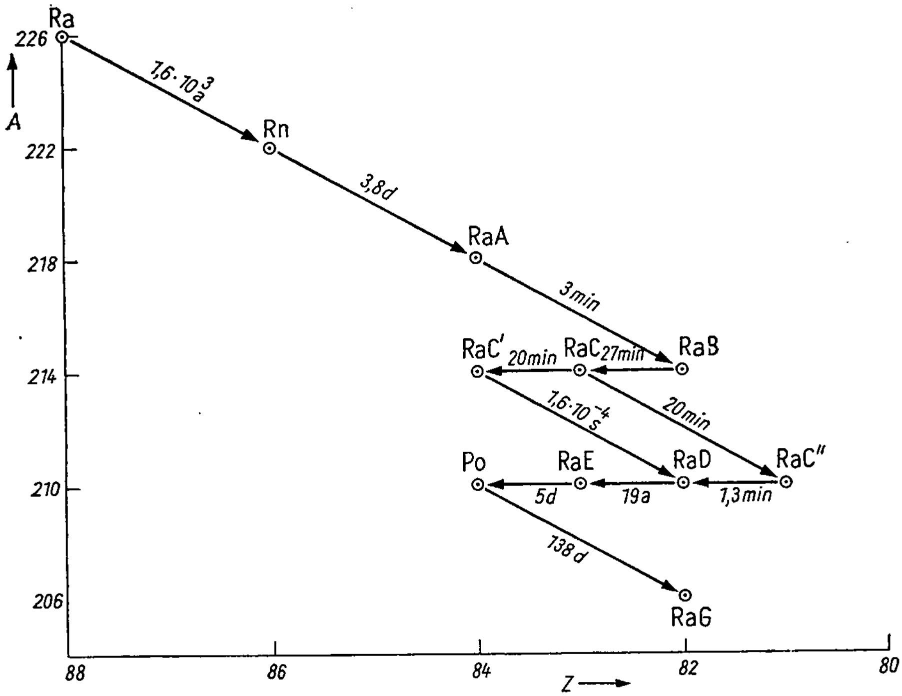


Abb. 4. Zerfallsreihe des Radiums und seiner Folgeprodukte

aktiver Körper die sogenannte Radium-Familie, die in Abb. 4 dargestellt ist. Man erkennt, wie viele verschiedenartige Zerfälle (α- und β-Zerfälle) aufeinander folgen, bis das stabile Endprodukt erreicht ist.

2.2. α-Zerfall

In den Jahren 1928 bis 1929 wurde die Theorie des α-Zerfalls erstmalig auf der Grundlage der Quantenmechanik ausgearbeitet. Die Annahme war, daß das α-Teilchen sich im Atomkern als fertiges Teilchen befindet und infolge des „Tunneleffektes" der Quantenmechanik die Potentialschwelle des Coulomb-Walles durchdringen kann. Die Potentialschwelle sei rechteckig angenommen (Abb. 5). Nach klassischen Vorstellungen kann ein Teilchen, das sich mit der Energie $E < U_0$

im Bereich I der Figur nach rechts bewegt, nicht in den Bereich II eindringen, ihn durchlaufen und schließlich im Bereich III außerhalb des Kerns weiterfliegen. Es wird reflektiert, wenn es an die Potentialwand gelangt. In der Quantenmechanik, in der dem Teilchen eine Welle zugeordnet wird, findet beim Auftreffen der Welle auf die Potentialwand ebenfalls Reflexion statt, jedoch nicht vollständig, ein Bruchteil der Welle wird die Potentialschwelle durchdringen können.

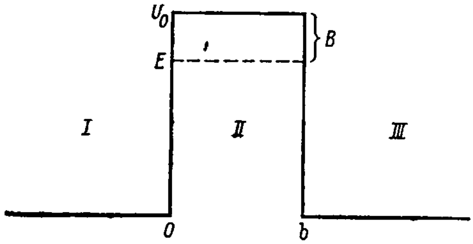


Abb. 5. Kernmodell für den α-Zerfall

Wenn die Wellenfunktion

$$\psi_e = \alpha e^{i(kx - \omega t)}$$

die auf die Potentialwand im Bereich I auftreffende Welle darstellt, dann wird

$$\psi_r = \beta e^{i(-kx - \omega t)}$$

die reflektierte Welle und

$$\psi_{III} = \gamma e^{i(kx - \omega t)}$$

die hindurchgelassene Welle darstellen. Die Wahrscheinlichkeit für den Durchgang, also die Durchlässigkeit des Potentialwalles, ist gegeben durch das Verhältnis der Intensitäten von durchgelassener zu einfallender Welle, $|\gamma|^2/|\alpha|^2$.

Es sei der zeitunabhängige Teil von ψ betrachtet:

$$\left.\begin{aligned} \psi_I &= \alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx}; \\ \psi_{III} &= \gamma e^{ikx}. \end{aligned}\right\} \quad (2.6)$$

Diese Funktionen sind Lösungen der zeitunabhängigen Wellengleichungen folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2M}{\hbar} E\psi = 0 && \text{für die Bereiche I und III;} \\ &\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2M}{\hbar} (U_0 - E)\psi = 0 && \text{für den Bereich II,} \end{aligned}\right\} \quad (2.7)$$

wobei

$$k = \pm \sqrt{\frac{2ME}{\hbar^2}} \qquad \text{für die Bereiche I und III und}$$

$$k = \pm \frac{1}{\hbar} \sqrt{2M(U_0 - E)} \qquad \text{für den Bereich II.}$$

Setzt man $U_0 - E = B$, so erhält man als Lösung im Bereich II

$$\psi_{\mathrm{II}} = A\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}\sqrt{2MB}\cdot x} + C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar}\sqrt{2MB}\cdot x}.$$

Die Konstanten β, γ, A und C werden durch die Grenzbedingungen der Stetigkeit von ψ und $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}x$ für $x = 0$, der Grenze zwischen den Bereichen I und II, und für $x = b$, der Grenze zwischen den Bereichen II und III, bestimmt. Man erhält

$$\alpha + \beta = A + C, \quad \text{da} \quad \psi_{\mathrm{I}}(0) = \psi_{\mathrm{II}}(0) \ \text{ist},$$

und

$$\mathrm{i}k(\alpha - \beta) = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2MB}\,(A - C), \quad \text{da} \quad \psi'_{\mathrm{I}}(0) = \psi'_{\mathrm{II}}(0) \ \text{ist}.$$

Zwei entsprechende weitere Gleichungen erhält man durch die Grenzbedingungen an der Stelle $x = b$. Setzt man, abkürzend, $q = \sqrt{2MB}$ und $p = \sqrt{2ME}$, so erhält man schließlich

$$\alpha = \frac{\gamma}{4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kb}\left\{\left(1 + \frac{q}{\mathrm{i}p}\right)\left(1 + \frac{\mathrm{i}p}{q}\right)\mathrm{e}^{-\frac{qb}{\hbar}} + \left(1 - \frac{q}{\mathrm{i}p}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{i}p}{q}\right)\mathrm{e}^{\frac{qb}{\hbar}}\right\}.$$

Das Glied mit dem Faktor $\mathrm{e}^{-\frac{qb}{\hbar}}$ ist, wie man sich leicht überzeugen kann, bereits für B-Werte der Größenordnung 0,1 MeV klein gegen $\mathrm{e}^{\frac{qb}{\hbar}}$; es kann demnach vernachlässigt werden. Näherungsweise kann weiterhin $\frac{p}{q} = \sqrt{\frac{E}{B}}$ als von der Größenordnung 1 betrachtet werden. Es ergibt sich dann $\alpha \approx \gamma\mathrm{e}^{\mathrm{i}kb}\,\mathrm{e}^{\frac{qb}{\hbar}}$, und für das Intensitätsverhältnis von durchgelassener zu reflektierter Welle erhält man

$$\frac{|\gamma|^2}{|\alpha|^2} \approx \mathrm{e}^{-\frac{2qb}{\hbar}}.$$

Die Durchlässigkeit der Potentialschwelle ist also

$$p \approx \mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2M(U_0 - E)}\cdot b}. \tag{2.8}$$

Hat die Potentialschwelle eine beliebige Form, fällt sie insbesondere im Bereich III entsprechend dem Coulomb-Potential mit $1/r$ ab, so erhält man für p

$$p \approx \mathrm{e}^{\frac{-2}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{2M[U(r) - E]}\,\mathrm{d}r}.$$

Abb. 6 zeigt die nach Gl. (2.8) errechneten Durchlässigkeiten für Protonen und einen Coulomb-Wall.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein α-Teilchen pro Zeiteinheit aus dem Kern austritt, ist gleich der Zahl der Zusammenstöße des Teilchens mit der Potential-

wand pro Zeiteinheit, multipliziert mit der Durchlässigkeit der Schwelle:

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{v}{R} \exp\left[-2\int_R^b \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu(U-E)}\,\mathrm{d}r\right]. \tag{2.9}$$

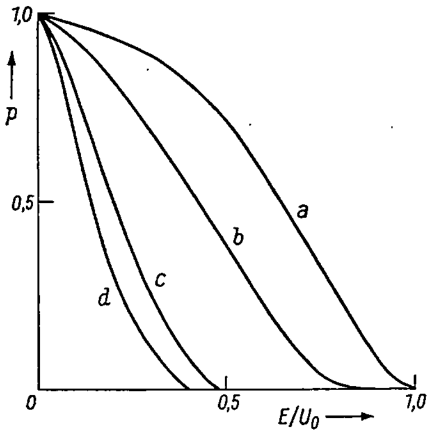


Abb. 6. Durchlässigkeit des Potentialwalls von Kernen für Protonen als Funktion ihrer relativen Energie

a) $A=1$, $Z=1$; b) $A=8$, $Z=4$; c) $A=90$, $Z=40$; d) $A=238$, $Z=92$

μ ist die abgeleitete Masse von α-Teilchen und Kern, v die Geschwindigkeit des α-Teilchens für große r, also $U \approx 0$, R der Kernradius, z und Z die Anzahl Elementarladungen des Protons bzw. des Kerns. Mit $v = 10^9$ cm/s und $R = 10^{-12}$ cm ergibt sich $v/R = 10^{21}\mathrm{s}^{-1}$. Es wird daher $1/\tau \approx 10^{21}\mathrm{e}^{-G}$, wobei G gegeben ist durch

$$G = \sqrt{\frac{8\mu z Z e^2}{\hbar^2}\,b}\int_R^b \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{E}{zZe^2}}\,\mathrm{d}r.$$

Dies ergibt

$$G = \sqrt{\frac{8\mu z Z e^2}{\hbar^2}\,b}\left[\arccos\left(\sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}}\right)\right]. \tag{2.10}$$

Für $R = 10^{-12}$ cm; $v = 3 \cdot 10^9$ cm/s; $E_{\mathrm{kin}} = 20$ MeV; $Z = 80$ erhält man für Protonen ($z = 1$):

$$\frac{1}{\tau} \approx 10^{21}\mathrm{e}^{-75} \approx 10^{-11}\mathrm{s}^{-1}.$$

Für eine hohe Potentialmulde hat G annähernd die Form

$$G \approx \frac{2\pi z Z e^2}{\hbar v}.$$

Durch diese Betrachtungen, deren Grundlagen von GAMOW konzipiert wurden, ist es z. B. verständlich, daß die Energien natürlicher α-Strahler wesentlich ge-

ringer sind als die infolge der Coulomb-Potentiale notwendigen Energien zur Überwindung dieses Potentialwalles. Die Betrachtungen für den α-Zerfall der Kerne werden später zur Erklärung der Reaktionen mit geladenen Teilchen und für das Verständnis des Zerfalls von Kernen in größere Bruchstücke, die Kernspaltung, mit Erfolg herangezogen werden. Abbildung 7 zeigt den Zerfall des ThC unter Emission von α-, β- und γ-Strahlen.

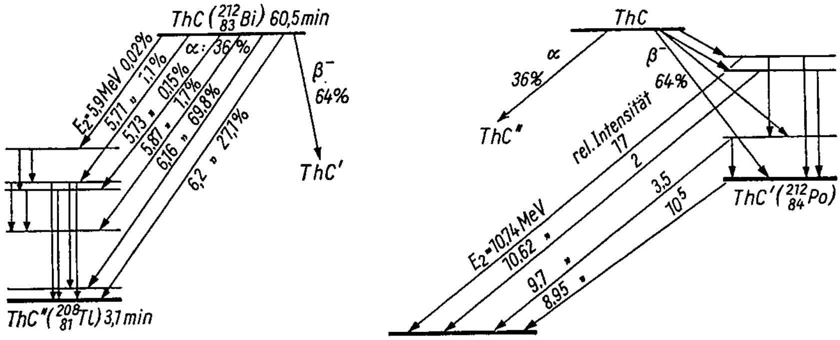


Abb. 7. α-Strahlen geringer Reichweite (Nimmo und Feather) und übernormaler Reichweite

2.3. β-Zerfall

Beim β-Zerfall wird aus dem Atomkern ein Elektron oder Positron emittiert. Auch der Einfang eines Elektrons aus der Atomhülle ist in diesem Fall einzuschließen. Als wichtige Besonderheit des β-Zerfalls ist eine scheinbare Verletzung des Satzes von der Erhaltung der Energie hervorzuheben. Bei anderen Prozessen des Kernzerfalls, z. B. bei dem beschriebenen α-Zerfall, wird eine exakte Erhaltung der Energie beobachtet. Wenn der Kern A in den Kern B durch α-Zerfall übergeht, so gilt der Energiesatz:

$$E_A = E_B + T_B + E_\alpha + T_\alpha \quad \text{oder} \quad M_A c^2 = M_B c^2 + T_B + M_\alpha c^2 + T_\alpha ,$$

wobei E_A... die Energien, M_A... die Massen, T_B und T_α die kinetischen Energien der Teilchen nach dem Zerfall bedeuten. Da bei den natürlichen α-Strahlern $M_\alpha \ll M_B$ ist, beobachtet man eine sehr genau definierte Energie T_α des α-Teilchens. Beim β-Zerfall läßt sich keine ähnliche Beziehung aufstellen. Die Energien der β-Teilchen zerfallender Kerne zeigen keineswegs konstante Werte, sondern weisen ein kontinuierliches Energiespektrum auf, das eine obere Grenze T_{max} zeigt (vgl. Abb. 8). Demnach erscheint es so, als ob das Energiegesetz nicht erfüllt sei oder daß Anfangs- und Endkern energetisch verschiedene Zustände für individuelle Kerne besitzen. Beide Möglichkeiten widersprechen allen Beobachtungen.

Experimentell wurde gefunden, daß $T_\beta^{max} = E_A - E_B$ ist. Das zeigt, daß Energie verloren werden, nicht jedoch entstehen kann. Der Ausweg aus dieser Situation wurde von W. PAULI gefunden, der die Existenz eines neuen Teilchens, des Neutrinos, postulierte. Das Neutrino übernimmt einen gewissen Anteil an Energie, so daß im Ausgang des β-Zerfalls drei Teilchen vorhanden sind: Restkern,

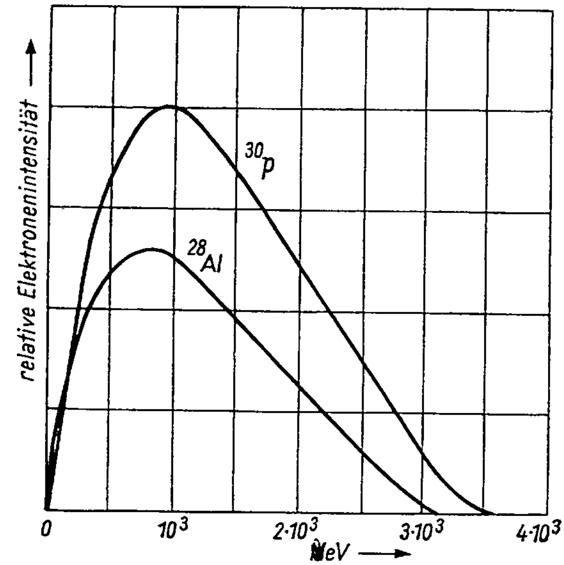


Abb. 8. Zwei Beispiele für β-Spektren

β-Teilchen und Neutrino. Das Neutrino besitzt keine elektrische Ladung und eine außerordentlich kleine Ruhmasse, die wahrscheinlich 0 ist. Die Energiebilanz für den β-Zerfall sieht dann folgendermaßen aus:

$$E_A - E_B = T_\beta + T_\nu$$

(wobei der geringe Energiebetrag für den Rückstoß des Teilchens B außer acht gelassen ist).

Beispiele für den β-Zerfall (vgl. Abb. 9)

$$^3_1\mathrm{H} \xrightarrow{12{,}3\,\mathrm{a}} {}^3_2\mathrm{He} + \beta^- + \bar{\nu}; \qquad T_\beta^{max} = 0{,}0186\ \mathrm{MeV}.$$

Dieser Prozeß führt zum Zerfall: $n \to p + \beta^- + \bar{\nu}$. Der Zerfall von ^3_1H ist der einfachste beobachtete β-Zerfall. Ein zweiter Typ des β-Zerfalls erfolgt nach dem Schema

$$^{11}_6\mathrm{C} \xrightarrow{20{,}4\,\mathrm{min}} {}^{11}_5\mathrm{B} + \beta^+ + \nu; \qquad T_\beta^{max} = 0{,}97\ \mathrm{MeV}.$$

Dieser Prozeß entspricht einem Zerfall: $p \to n + \beta^+ + \nu$. Ein dritter Typ des β-Zerfalls kann durch folgenden Prozeß charakterisiert werden:

$$^7_4\mathrm{Be} \xrightarrow{53{,}6\,\mathrm{d}} {}^7_3\mathrm{Li} + \nu - e^-_K.$$

e_K^- bedeutet den Einfang eines Elektrons aus der K-Schale von $^7_4$Be, als dessen Folge der Kern $^7_3$Li* entsteht. $^7_3$Li* besitzt alle Atomelektronen, befindet sich jedoch (zunächst) in angeregtem Zustand mit einem Loch in der K-Schale.

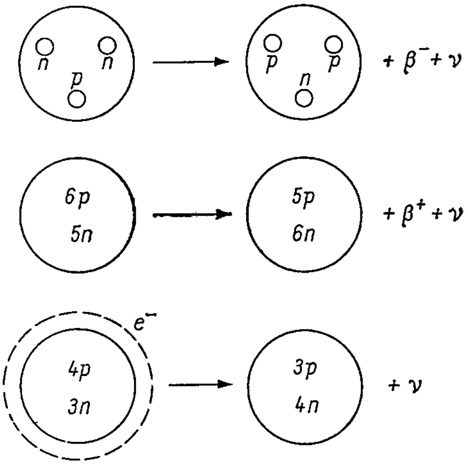


Abb. 9. Beispiele für den Zerfall von Spiegelkernen

Betrachten wir die Energieverhältnisse für die drei Typen des β-Zerfalls. Der β⁻-Zerfall eines Kerns der Massenzahl A und der Ordnungszahl Z ist dann energetisch möglich, wenn

$$M(A, Z) > M(A, Z + 1) + m_e$$

ist. Setzt man, was bequemer ist, statt der Kernmassen M die Atommassen M_{At}, so ergibt sich:

$$M_{At}(A, Z) > M_{At}(A, Z + 1).$$

Die beim β⁻-Zerfall frei werdende Energie ist dann:

$$\Delta T_\beta^- = [M_{At}(A, Z) - M_{At}(A, Z + 1)]\, c^2. \tag{2.11}$$

Für den β⁺-Zerfall ergeben sich analog folgende Bedingungen:

$$M(A, Z + 1) > M(A, Z) + m_e$$

$$M_{At}(A, Z + 1) > M_{At}(A, Z) + 2m_e.$$

Für die in diesem Falle frei werdende Energie erhält man:

$$\Delta T_\beta^+ = [M_{At}(A, Z + 1) - M_{At}(A, Z) - 2m_e]\, c^2. \tag{2.12}$$

Schließlich erhält man für die Energiebilanz beim K-Einfang:

$$\Delta T_K = [M_{At}(A, Z + 1) - M_{At}(A, Z)]\, c^2. \tag{2.13}$$

Vergleicht man die abgeleiteten Beziehungen (2.11) ··· (2.13) miteinander, so gelangt man zu folgenden Ergebnissen hinsichtlich der Bedingungen für die drei β-Zerfälle:

$$\text{I.} \quad \beta^-: \quad M_{\text{At}}(A, Z) > M_{\text{At}}(A, Z + 1);$$
$$\text{II.} \quad \beta^+: \quad M_{\text{At}}(A, Z + 1) > M_{\text{At}}(A, Z) + 2m_e;$$
$$\text{III.} \quad \text{K-Einf.}: \quad M_{\text{At}}(A, Z) < M_{\text{At}}(A, Z + 1).$$

Im Falle des β^--Zerfalls ist der Kern (A, Z) radioaktiv, aber (A, Z) kann auch K-Einfang zeigen. Hieraus folgt, daß stabile Isobare mit Kernladungen, die sich um eine Einheit unterscheiden, nicht existieren sollten. Um dies näher zu veranschaulichen, sei das Diagramm Abb. 10 betrachtet. Man erkennt, daß der

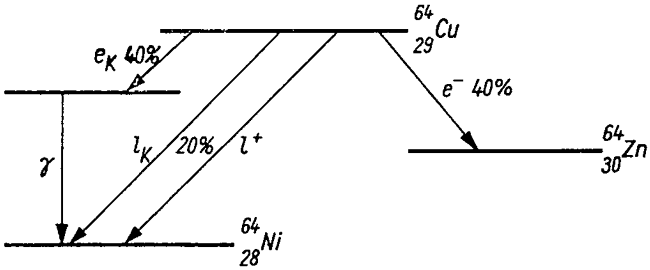


Abb. 10. Zerfallsniveaus von $^{64}_{29}\text{Cu}$

uu-Kern $^{64}_{29}\text{Cu}$ Übergänge zu den stabilen Kernen Ni und Zn besitzt, die sich um 2 Einheiten in der Kernladung unterscheiden. Ausnahmen von dieser Regel gibt es für einige Kerne, die sich durch ihre Drehimpulse erheblich unterscheiden, so daß der Übergang verboten ist. So hat z. B. $^{113}_{48}\text{Cd}$ nur $J = 1/2$, für $^{113}_{49}\text{In}$ dagegen gilt $J = 9/2$.

Da nach Gl. II für den β^+-Zerfall die obenstehende Beziehung erfüllt ist, folgt, daß die Beziehung III für den Elektroneneinfang ebenfalls erfüllt ist. Ein entsprechender Kern kann daher sowohl durch β^+-Zerfall als auch durch Elektroneneinfang umgewandelt werden. Bekannte Beispiele hierfür sind $^{52}_{25}\text{Mn}$ und $^{22}_{11}\text{Na}$, die folgendermaßen umgewandelt werden:

$$^{52}_{25}\text{Mn} \xrightarrow[\text{K} - 67\%]{\beta^+ - 33\%} {}^{52}_{24}\text{Cr};$$

$$^{22}_{11}\text{Na} \xrightarrow[\text{K} - 11\%]{\beta^+ - 89\%} {}^{20}_{10}\text{Ne}.$$

Wie der in Abb. 10 dargestellte Zerfall von $^{64}_{29}\text{Cu}$ zeigt, kann die Bedingung II für den β^+-Zerfall erfüllt sein und gleichzeitig Bedingung I für den β^--Zerfall. Die Beziehungen I und II haben dann die Form

$$M_{\text{At}}(A, Z) > M_{\text{At}}(A, Z + 1);$$
$$M_{\text{At}}(A, Z) > M_{\text{At}}(A, Z - 1) + 2m_e.$$

Wie im Abschnitt 1.1. gezeigt wurde, existieren keine Elektronen im Atomkern. Sie entstehen im Kern im Augenblick des β^--Zerfalls durch Umwandlung eines Neutrons in ein Proton:

$$n \to p + e^- + \tilde{\nu}.$$

Das entstehende Elektron kann nicht im Kern verbleiben, sondern verläßt ihn gleichzeitig mit einem Antineutrino. Analog bilden sich beim Protonenzerfall

$$p \to n + e^+ + \nu$$

ein Neutron, ein Positron und ein Neutrino.

Innerhalb eines stabilen Kerns kann das Neutron mit unbegrenzter Lebensdauer existieren. Im freien Zustand ist es instabil und besitzt eine Lebensdauer von 1000 s, also etwa 13 min. Beim β^--Zerfall verringert sich die Masse des Neutrons, das in ein Proton übergeht, um 2,5 $m_e c^2$. Dem Zerfallsprozeß steht demnach diese Energie zur Verfügung.

Die Theorie des β-Zerfalls wurde 1934 von FERMI auf den Grundlagen der Quantenelektrodynamik entwickelt. Hierbei werden die Prozesse der Emission und Absorption von Photonen als Folgen der Wechselwirkung von elektrischen Ladungen mit dem elektromagnetischen Feld betrachtet. Die Photonen existieren nicht in fertiger Form im Atom, sondern werden im Augenblick der Emission gebildet. Ihre Quelle ist die elektrische Ladung.

In FERMIS Theorie wird der β-Zerfall als Resultat der Wechselwirkung zwischen den Nukleonen des Kerns und einem Elektronen-Neutrino-Feld behandelt. Das Nukleon geht in einen anderen Zustand über — aus dem Neutron in ein Proton oder umgekehrt —, wobei ein Elektron (Positron) und ein Antineutrino (Neutrino) gebildet werden. Als Quellen der leichten Teilchen erscheinen die Nukleonen. Das Resultat der quantentheoretischen Rechnungen FERMIS hat folgende Form:

$$F(\varepsilon_0)\,\tau \approx \text{const};$$

τ = mittlere Lebensdauer des Kerns, $\varepsilon_0 = \dfrac{m_e c^2 + T_e^{\max}}{m_e c^2}$. Die Funktion $F(\varepsilon_0)$ ergibt sich aus der Rechnung für große ε_0 zu

$$F(\varepsilon_0) \sim \varepsilon_0^5.$$

Tabelle 3

β-Zerfall	Halbwertszeit	$T_e^{\max}$ MeV	$(\ln F)\,\tau$ s
${}^3_1H \xrightarrow{\beta^-} {}^3_2He$	12,46 a	0,019	3,05
${}^6_2He \xrightarrow{\beta^-} {}^6_3Li$	0,82 s	3,22	2,91
${}^{11}_6C \xrightarrow{\beta^+} {}^{11}_5B$	20,42 min	8,99	3,59
${}^{18}_9F \xrightarrow{\beta^+} {}^{18}_8O$	1,78 h	0,64	3,57

Für $(\varepsilon_0 - 1) \ll 0{,}5$ erhält man $F(\varepsilon_0) \sim \varepsilon_0^7$. Tabelle 3 zeigt die Werte von $(\ln F)\tau$ für einige sehr verschieden hohe Energien und Halbwertszeiten von β-Strahlern. Man erkennt, daß innerhalb von Energie- bzw. Halbwertszeitbereichen der Größenordnung 100 die Konstanz der genannten Beziehung recht weitgehend erfüllt ist.

2.4. γ-Strahlung und innere Konversion

γ-Strahlung wird nach α- oder β-Zerfall (bzw. nach anderen Kernreaktionen) emittiert, wenn der Kern in angeregtem Zustand zurückbleibt (Abb. 7). Nach einem α-Zerfall werden im allgemeinen γ-Quanten mit Energien $E_\gamma > 0{,}5$ MeV ausgesandt. Da das α-Teilchen die Potentialschwelle des Kerns überschreiten muß, bedarf es, bei den großen Z-Werten der α-aktiven Kerne, hoher Energien, um ein Verlassen des Kerns bewirken zu können. Hochangeregte Tochterkerne sind daher wenig wahrscheinlich. Nach einem β-Zerfall kann ein höher angeregter Tochterkern zurückbleiben. Hierbei beobachtet man γ-Quanten mit Energien bis 2 und 2,5 MeV. Dies ist dadurch bedingt, daß die Wahrscheinlichkeit für den β-Zerfall schwächer mit der Energie ansteigt ($F \sim \varepsilon_0^5$) als die für den α-Zerfall ($\tau \approx e^{-G}$). Ein Kern, der γ-Quanten aussendet, muß eine geringere Anregungsenergie besitzen, als sie zur Entfernung eines Nukleons notwendig ist. Die Emission von γ-Quanten ist dann die einzige Möglichkeit für den Kern, in seinen Grundzustand zurückzukehren. Als Beispiel hierfür zeigt Abb. 7 das Zerfallsschema von ThC. Man erkennt, daß auf diese Weise der Zerfall des ThC in seltenen Fällen zu angeregten Zuständen der Tochtersubstanz ThC″ führen kann, wodurch dann α-Teilche ngeringerer Energien als beim Übergang in seinen Grundzustand emittiert werden. Das ThC″ geht durch Emission von γ-Quanten in seinen Grundzustand über.

Der Übergang des Ausgangskerns in den Grundzustand des Tochterkerns sollte die energiereichsten α-Teilchen des betreffenden Zerfalls liefern. Jedoch sind bereits in den Jahren 1916 bis 1920 durch Rutherford bei den α-Teilchen, die von $^{212}_{83}$ThC und von $^{212}_{84}$ThC′ ausgesandt werden, α-Teilchen übernormaler Reichweiten beobachtet worden, deren Existenz zunächst mehr oder weniger zweifelhaft erschien. ThC, das (s. Abb. 7) durch β-Zerfall in ThC′ übergeht, bleibt in angeregtem Zustand zurück, und zwar auf verschieden hoch angeregten Niveaus. Von diesen Niveaus aus zerfällt es in ThD. Hierdurch kommen, wie Abb. 7 veranschaulicht, gegenüber der Hauptgruppe der α-Strahler mit einer Energie von 8,95 MeV eine größere Anzahl weitreichender α-Strahlen zustande.

Innere Konversion

Die von einem Kern emittierte γ-Strahlung kann direkt auf ein Elektron der Hülle desselben Atoms übertragen werden. In diesem Falle, den man als innere Konversion bezeichnet, werden Elektronen monochromatischer Energien beobachtet. Die Energie des Elektrons ist gegeben durch die Differenz der Energie des γ-Quantes und der Bindungsenergie des aus der K-, L- usw. Schale abgelösten

Elektrons. Die Konversionsstrahlung wird, wie aus dem Mechanismus folgt, immer von der für das Atom charakteristischen Röntgenstrahlung und den Auger-Elektronen begleitet. Das Verhältnis Anzahl N_e der Konversionselektronen

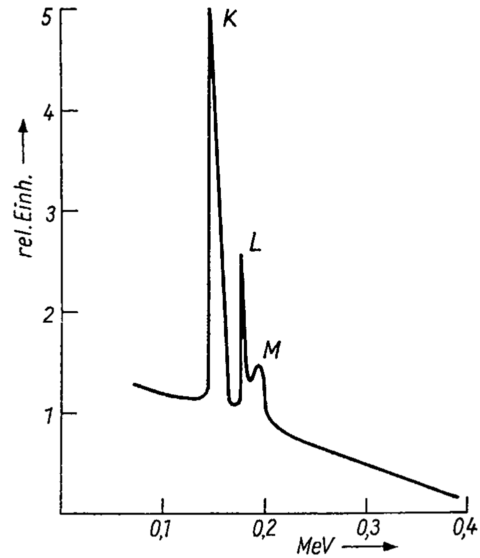


Abb. 11. Spektren von Konversionselektronen

zur Anzahl N_γ der γ-Quanten bezeichnet man als den Koeffizienten der inneren Konversion (vgl. Abb. 11)

$$\alpha = \frac{N_e}{N_\gamma} = \alpha_K + \alpha_L + \ldots;$$

α_K, α_L, ... sind Partialkoeffizienten für K-, L- usw. Elektronen. Man erkennt, daß die Beobachtung der Konversionselektronen von hoher Bedeutung für die Bestimmung der Energien für die γ-Strahl-Übergänge und damit für die Anordnung der Kernniveaus ist. Darüber hinaus geben die Beträge der Konversionskoeffizienten Informationen über weitere Eigenschaften der Kernniveaus, Kernmomente, elektrische und magnetische Multipolstrahlung. Da die Wahrscheinlichkeit der Konversion mit der Dichte der Elektronen in Kernnähe wächst, ist diese Erscheinung besonders bei höheren Z-Werten zu beobachten.

2.5. Mössbauer-Effekt

Bei den bisherigen Betrachtungen wurden den energetischen Zuständen der Atomkerne genau definierte Energiewerte zugeschrieben. Das ist nicht ganz richtig. Betrachten wir als Beispiel den Kern $^{191}_{77}$Ir, der durch Emission von γ-Quanten mit $E_\gamma = 129$ keV bei einer Halbwertszeit von etwa 10^{-10} s in den

Grundzustand übergeht. Mit Hilfe der Unschärferelation läßt sich dann die Unbestimmtheit der Energie dieses Zustandes abschätzen:

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-16}}{10^{-10}}\,\mathrm{eV} = 6{,}6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{eV}.$$

Nur der Grundzustand des Kerns hat $\Delta E = 0$ ($\Delta t = \infty$), ist also genau definiert. Durch die Unschärfe der Niveaubreite entsteht eine gewisse Breite der γ-Linie, im angeführten Beispiel von

$$\Gamma \approx 7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{eV}; \qquad \frac{\Gamma}{E} \approx 5 \cdot 10^{-11}.$$

Die aus der Optik bekannte Erscheinung der Resonanzabsorption konnte im Falle von γ-Strahlen zunächst nur für γ-Linien mit erheblicher Halbwertsbreite beobachtet werden. Das ist verständlich, denn es steht für γ-Strahlen zur Resonanzabsorption nicht die volle Energie der γ-Linie zur Verfügung, da ein Teil der Energie bei der Emission als Rückstoßenergie T_K von dem emittierenden Kern verbraucht wird. Zur Anregung eines Kerns bis zur Energie E benötigt man andererseits den Energiebetrag: $E_\gamma = E + T_K > E$.

Für gleiche Kerne sind die emittierte γ-Linie und die Absorptions-γ-Linie um $2T_K$ voneinander verschieden, denn der emittierende Kern erhält, wie erwähnt, ebenfalls einen Rückstoß der Größe T_K. Es gilt also für die Emission:

$$E_\gamma = E - T_K < E.$$

Mit Hilfe der kinematischen Gesetze läßt sich die Rückstoßenergie für den Kern leicht errechnen:

$$T_K = \frac{p_K^2}{2M_K} = \frac{P_\gamma^2}{2M_K} = \frac{E_\gamma^2}{2M_K c^2} \approx \frac{E^2}{2M_K c^2}.$$

Für das Beispiel des $^{191}_{77}\mathrm{Ir}$ erhält man

$$T_K = \frac{(1{,}29 \cdot 10^5)^2}{2 \cdot 191 \cdot 931 \cdot 10^6} \approx 0{,}05\,\mathrm{eV}.$$

Dieser Betrag übersteigt erheblich den der natürlichen Linienbreite. Man sieht somit, daß Resonanzabsorption nur für γ-Linien großer Breiten zu beobachten ist (Abb. 12). Ein Versuch zur künstlichen Verbreiterung der γ-Linien mit Hilfe des Doppler-Effektes wurde 1953 von Muku und Stowost angestellt. Durch ein rotierendes Präparat konnte mit Hilfe der Doppler-Verschiebung eine Verbreiterung der γ-Linien erzielt werden, doch erwies sich die Methode als ungenau.

Im Jahre 1958 wurde von Mössbauer der entscheidende Schritt zur Beobachtung der Resonanzabsorption getan. Die Idee war, die Rückstoßenergie dadurch wesentlich zu verringern, daß an Kristallgitter gebundene Kerne verwendet wurden. Bei genügend geringen γ-Energien wird durch den Emissionsrückstoß das strahlende Atom nicht aus dem Kristallverband gelöst. Den elastischen Rückstoß übernimmt dann der Kristall als Ganzes, er wird daher verschwindend gering. Die ersten Messungen Mössbauers gelangen mit abgekühltem Strahler und

Absorber aus dem genannten ^{191}Ir. Abbildung 13 zeigt das Schema der Experimente. Die Messungen wurden auf einen Platinabsorber gleicher Absorption wie das Iridium bezogen. Die natürliche Linienbreite ergab sich zu $\Gamma \approx 5 \cdot 10^{-6}$ eV,

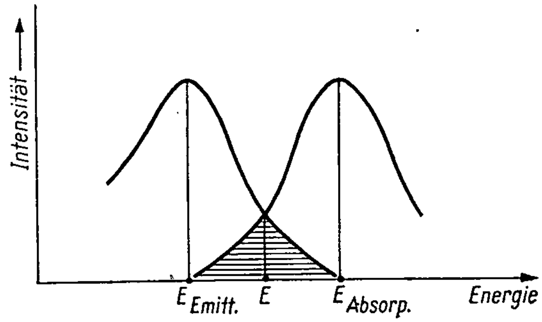


Abb. 12. Energieverteilung von γ-Linien in Emission und Absorption

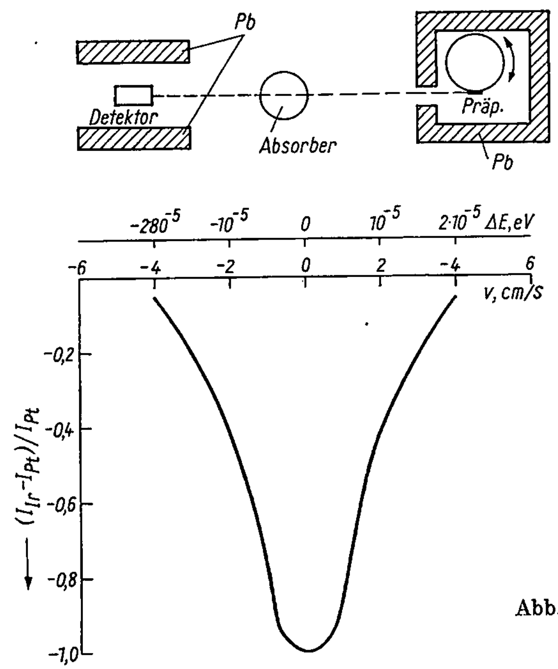


Abb. 13. Meßanordnung für den Mössbauer-Effekt

stimmt also gut mit den aus den Zerfallsdaten (E_γ; Halbwertszeit) und der Unschärferelation errechneten Werten überein.

Die Methode der Resonanzabsorption gestattet eine sehr genaue Energiemessung. Im angeführten Beispiel beträgt $\Gamma/E \approx 4 \cdot 10^{-11}$. Man kann noch etwa

um einen Faktor 100 höhere Empfindlichkeiten der Energiemessung erreichen. Außer am ^{191}Ir wurden insbesondere Messungen an ^{57}Fe angestellt. Hierbei beträgt die Energie der γ-Quanten 14,4 keV und die Halbwertszeit 10^{-7} s, so daß $\Gamma/E \approx 3 \cdot 10^{-13}$ wird. Für ^{67}Zn erhält man eine noch höhere Energieauflösung, da die γ-Energie 93 keV und die Halbwertszeit $9{,}4 \cdot 10^{-6}$ s betragen. Es wird $\Gamma/E = 5 \cdot 10^{-16}$.

Diese sehr hohe Genauigkeit des Verfahrens gestattet eine Anzahl von Messungen, die bisher nicht möglich waren. Die Doppler-Bewegung der Atome verursacht z. B. eine so starke Verbreiterung der γ-Linien, daß eine erhebliche Abkühlung der zu untersuchenden Substanzen notwendig wird. Es sei jedoch auf die sehr zahlreichen und interessanten Anwendungen des Mössbauer-Effektes in der Physik und Chemie hier nicht näher eingegangen, da Spezialliteratur bereits in großem Umfange vorhanden ist (vgl. Anhang VI).

3. MESSMETHODEN FÜR ELEKTRISCH GELADENE TEILCHEN

3.1. Ionisationskammern

Wie in den Betrachtungen des Kap. 4 ausgeführt wird, übertragen geladene Teilchen bei ihrem Durchgang durch Materie infolge elektrischer Wechselwirkungen Energiebeträge an die Elektronen des Atoms. Dies kann zur Abtrennung von Elektronen aus dem Atomverband, zur Ionisation, führen. Hierbei können Energien übertragen werden, die so groß sind, daß diese Elektronen — δ-Elektronen — ihrerseits andere Atome ionisieren. Mit Hilfe elektrischer Felder gelingt es, die

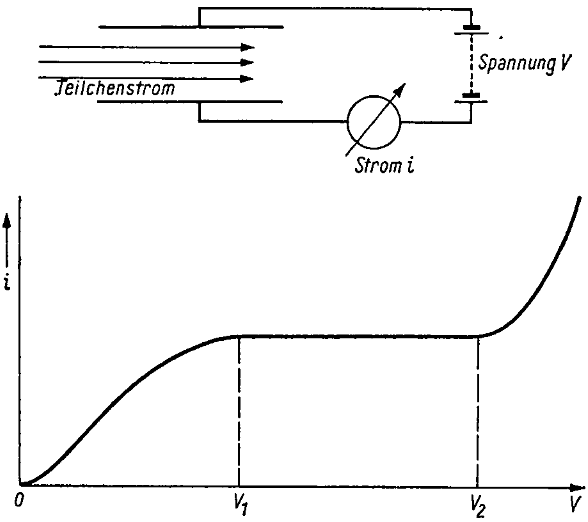


Abb. 14. Ionisationskammer und Abhängigkeit des Ionenstroms i von der Kammerspannung V

auf diese Weise erzeugten Ionenpaare bzw. die positiven Ionen und Elektronen an ihrer Wiedervereinigung zu hindern und sie den Elektroden einer geeigneten „Ionisationskammer" zuzuführen (Abb. 14). Mit elektrischen Meßgeräten — Elektrometern, Galvanometern oder elektronischen Verstärkern — können Ladungen oder Ströme gemessen werden, die ein Maß für die Zahl der erzeugten Ionenpaare liefern. Im allgemeinen erfolgt dabei der Ionisationsvorgang in Gasen. Da

die Arbeit, die zur Erzeugung eines Ionenpaares erforderlich ist, für ein Gas innerhalb weiter Energiebereiche konstant ist (vgl. Tab. 7), läßt sich aus dem gemessenen Strom der beim Durchlaufen der Kammer vorhandene Energieverlust ermitteln. Da mit den älteren Methoden nicht die Ionisationseffekte einzelner Teilchen, sondern nur die eines Teilchenstromes gemessen werden konnten, war früher außer der Strommessung noch eine Zählung der Teilchen des Bündels notwendig. Die Energie zur Erzeugung eines Ionenpaares liegt bei etwa 30 eV, daher bedarf es zur Messung einzelner α-Teilchen, z. B. von Polonium, deren Energie 5,3 MeV beträgt, recht empfindlicher Meßmethoden, insbesondere wenn die differentielle Ionisation längs kürzerer Wegstrecken gemessen werden soll. Die derzeitigen elektrischen und elektrooptischen Methoden gestatten es, noch Einzelteilchen, deren Ionisationseffekt in der Größenordnung von einigen hundert Ionenpaaren liegt, nicht nur zu zählen, sondern auch quantitativ zu bestimmen.

Variiert man an der Meßanordnung Abb. 14 die angelegte Spannung, so erhält man einen Stromverlauf, wie ihn der untere Teil der Abbildung schematisch zeigt. Bei kleinen Spannungswerten steigt der Strom zunächst nach dem Raumladungsgesetz an und erreicht dann einen konstanten Wert, der über einen größeren Spannungsbereich erhalten bleibt. Den hier vorhandenen Strom nennt man Sättigungsstrom, es werden alle erzeugten Ionen zu den Elektroden bewegt. Steigert man die Spannung weiter, so gelangt man in einen Bereich, in dem die Ionen bei ihrer Bewegung im elektrischen Feld soviel Energie gewinnen, daß sie ihrerseits Gasatome ionisieren können. In diesem Falle beginnt mit wachsender Spannung eine starke Stromzunahme, die bei weiterer Spannungssteigerung zur selbständigen Entladung führt.

Betrachten wir zunächst die Vorgänge im Bereich von $V = 0$ bis $V = V_2$. Ohne elektrisches Feld bewegen sich die Ionen im Gas ungeordnet mit mittleren Energien, die den thermischen Bewegungsenergien der Gasmoleküle entsprechen. Diese Energie beträgt $\frac{3}{2}\,kT$, bei 20 °C etwa 0,04 eV. Unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes wird der ungeordneten Bewegung eine Bewegung in der Feldrichtung überlagert, der sogenannte Drift, und die Bewegungsenergie der Ionen wird größer als $\frac{3}{2}\,kT$.

Die mittlere Energie von Ionen oder Elektronen in Anwesenheit eines elektrischen Feldes mißt man in Bruchteilen ε der thermischen Energie. Diese Energie läßt sich durch eine mittlere quadratische Geschwindigkeit u^2 der Ionen charakterisieren:

$$\varepsilon\left(\frac{3}{2}\,kT\right) = \frac{m u^2}{2}\,. \tag{3.1}$$

Für positive und negative Ionen im elektrischen Feld ist deren mittlere Bewegungsenergie sehr nahe gleich der thermischen Energie. Freie Elektronen besitzen jedoch oft sehr viel höhere Energiewerte.

Die Bewegung geladener Teilchen im elektrischen Feld wird durch die „Driftgeschwindigkeit" beschrieben. Dies ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der geladenen Teilchen in einem homogenen elektrischen Feld oder der Geschwindigkeitsvektor, gemittelt über alle zu betrachtenden Teilchen. Die Driftgeschwin-

digkeit w läßt sich durch Größen ausdrücken, die in engem Zusammenhang mit der mittleren freien Weglänge eines Ions zwischen zwei Zusammenstößen mit Atomen stehen. Die mittlere freie Weglänge λ ist umgekehrt proportional dem Gasdruck p, bei dem sie den Wert λ/p besitzt, wenn λ für $p = 1$ normiert ist. Die Driftgeschwindigkeit w läßt sich als Funktion von λ/p unter folgenden vereinfachenden Annahmen errechnen:

1. alle betrachteten Teilchen haben die gleiche Geschwindigkeit u;
2. die Bewegung der Teilchen nach dem Zusammenstoß mit Gasmolekülen sei unabhängig von ihrer Bewegung vor dem Stoß. Pro Zeiteinheit erleidet ein Teilchen im Mittel up/λ Zusammenstöße und verliert folglich im Mittel den Impuls $(up/\lambda)\,mw$. Andererseits erhält das Teilchen durch das elektrische Feld pro Zeiteinheit einen Impuls eE. Im Gleichgewichtszustand ergibt sich

$$\frac{up}{\lambda}\,mw = eE \quad \text{oder} \quad w = \frac{e}{m}\,\frac{\lambda}{pu}\,E. \tag{3.2}$$

Die Voraussetzungen 1 und 2 sind in Wirklichkeit nicht erfüllt. Man kann jedoch λ als eine Größe betrachten, die mit Hilfe von Gl. (3.2) bestimmt wird. Unter dieser Voraussetzung zeigt Gl. (3.2), daß die Impulsverluste infolge Zusammenstoßes pro Zeiteinheit proportional dem Druck und der Driftgeschwindigkeit sind und weiterhin nur von der Natur des Gases und der Energieverteilung der Teilchen abhängen.

Die Driftgeschwindigkeit w ist für positive und negative Ionen in weiten Bereichen der elektrischen Feldstärke proportional: $w = \frac{\mu}{p}\,E$. Die Größe μ ist die „Ionenbeweglichkeit", gemessen für 760 Torr und Normaltemperatur. Tabelle 3 zeigt die Ionenbeweglichkeiten in $\frac{\text{cm}}{\text{s}}\,\frac{\text{cm}}{\text{Volt}}\,\frac{1}{\text{Torr}}$ für einige Gase, die als Füllung von Ionisationskammern Verwendung finden. Von großer Bedeutung sind der Nachweis und die Messung von *einzelnen* Korpuskularstrahlen. Die ersten Versuche in dieser Richtung wurden mit elektrometrischen Apparaturen höchster Empfindlichkeit — dem von G. Hoffmann entwickelten Duantenelektrometer — durchgeführt. Anfang der zwanziger Jahre erfolgte die Entwicklung von Verstärkern mit Elektronenröhren — an der Wiener Universität unter G. Stetter, J. Schintlmeister u. a. —, die die sehr diffizil zu handhabenden Elektrometer und die ungenauen Szintillationsmessungen verdrängten. Um eine quantitative Messung der von einzelnen Teilchen erzeugten Ionenimpulse durchzuführen, muß die Zeitkonstante des Röhrenverstärkers so groß dimensioniert werden, daß keine Veränderung der Ladungsimpulse erfolgen kann, daß also Eingangs- und Ausgangsimpulse einander proportional sind. Derartige Verstärker nennt man Proportionalverstärker. Da die Ionenbeweglichkeiten in der Größenordnung 1 bis $2\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}\cdot\frac{E}{p}$ liegen, wird die Geschwindigkeit, mit der die Ionen zu den Meßplatten bewegt werden, bei Feldstärken von 10^3 V/cm und Normaldruck in der Größenordnung von einigen Millisekunden liegen und die Zeitkonstante des Verstärkers um einen Faktor 10 bis 50 größer sein müssen. Ohne auf einige andere Verstärkervarianten einzugehen, sei ein weiteres, sehr wichtiges Verfahren zur Verkürzung der Ionisationsimpulse erwähnt.

Einige Gase — Wasserstoff, Stickstoff und die Edelgase — bilden bei hohen Reinheitsgraden keine negativen Ionen. In diesem Falle erhält man beim Vorgang der Ionisation positive Ionen und Elektronen. Die Beweglichkeit der Elektronen ist weitgehend von der elektrischen Feldstärke abhängig, daher gilt nicht mehr die einfache Beziehung (3.2). Sie besitzen aber, wie Tabelle 4 zeigt, Driftgeschwin-

Tabelle 4

Gas	Ionenbeweglichkeit für einige Gase		Driftgeschwindigkeit für Elektronen in reinen Gasen $p = 760$ mm; $E = 760$ V/cm; $E/p = 1$
	μ^+	μ^-	w: 10^{-6} cm/s
H_2	5,7	8,6	1,2
N_2	1,29	1,82	0,9
O_2	1,33	1,80	—
Luft	1,37	1,8	—
He	5,1	6,3	0,8
Ne	—	—	1,2
Ar	1,37	1,7	0,6
CO_2	1,79	0,95	0,55

digkeiten, die etwa um den Faktor 10^3 größer sind als die der Ionen. Auf diese Weise lassen sich mit hochgereinigten Gasen Impulse von weniger als 10^{-6} s Dauer erzielen.

Bei Kammern mit derartigen Gasen tritt jedoch eine andere Schwierigkeit auf: Die Größe des erzielten Impulses wird abhängig vom Ort, an dem das Teilchen die Kammer durchsetzt. Das kommt dadurch zustande, daß während der kurzen Abscheidungszeit der Elektronen am Auffänger der Ionisationskammer die positiven Ionen den Entstehungsort des Ionisationsaktes praktisch nicht verlassen. Quantitativ läßt sich das nach D. C. Corson und R. R. Wilson (1948) folgendermaßen erfassen (Abb. 15). Am Ort x_0 sei ein Ionen-Elektronen-Paar entstanden.

Das Elektron wird sich mit einer mehr als 10^3 mal größeren Geschwindigkeit bewegen als das positive Ion, das wir demnach vergleichsweise als im Entstehungspunkt ruhend betrachten können. Ist C die Kapazität der Auffangelektrode einschließlich ihrer Zuleitungen, so ist die Energie des Elektrodensystems $C\,V_0^2/2$, wobei V_0 die Spannung zwischen beiden Elektroden bedeutet. Bewegt sich das Elektron e^- in der Richtung der elektrischen Kraftlinien zur positiven Elektrode hin von x_0 bis x, so ist die elektrostatische Energie des Systems

$$\frac{1}{2}\,C\,V^2 = \frac{1}{2}\,C\,V_0^2 - \int\limits_{x_0}^{x} eE\,\mathrm{d}x \qquad (E = \text{Feldstärke}). \tag{3.3}$$

Setzt man $V_C = V_0 - V$ für die Größe des Spannungsimpulses, wobei $V_C \ll V_0$ ist, so erhält man

$$V_C = \frac{1}{V_0 C}\int\limits_{x_0}^{x} eE\,\mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

Diese Beziehung gilt für beliebige Felder. Beim Parallelplattenkondensator wird $E = V_0/a$, und man erhält

$$V_C = \frac{e}{Ca}(x - x_0)$$

bzw., da $x = x_0 + \int_0^t v \, dt$ ist,

$$V_C = \frac{ev}{Ca}t = \frac{e}{Ca}(x - x_0). \tag{3.5}$$

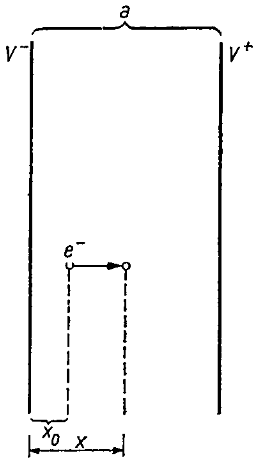


Abb. 15. Bewegung von Elektronen im elektrischen Feld

Für $x = a$, wenn also die Ladung e die positive Elektrode erreicht hat, erhält man: $V_C = \frac{e}{C \cdot a}(a - x_0)$. Der Spannungsimpuls V_0 ist demnach abhängig vom Ort x_0, an dem die Ladung erzeugt wird.

Die positive Ladung wird zur negativen Elektrode hin bewegt, und man erhält

$$V_+ = \frac{ev_+}{Ca}t_+ = \frac{e}{Ca}x.$$

Der Gesamtimpuls wird $V_g = V_C + V_+ = e/C$. Da jedoch v_+ klein gegen v ist, wird der Zustand vollständiger Abscheidung beider Ladungen durch die lange Zeit bestimmt, innerhalb derer die positiven Ladungen abgewandert sind. Man hätte demnach keinen Gewinn gegenüber gewöhnlichen „Ionengasen“. Mit Hilfe besonderer Einrichtungen (Einführung eines Schutzgitters vor der Auffang-elektrode für die Elektronen) kann man den Einfluß positiver Ionen ausschalten und, unabhängig vom Entstehungsort, erreichen, daß die gesamte Zahl der erzeugten Elektronen den Impuls V_C am Auffänger bestimmt. Auf diese Weise lassen sich Impulsdauern von der Größenordnung 10^{-7} s erreichen.

Obwohl mit einigen anderen Anordnungen wesentlich kürzere Impulsdauern bei der Messung ionisierender Teilchen erzielt worden sind, haben Ionisationsmethoden bis heute ihre Bedeutung in weitem Umfange behalten.

3.2. Zählrohre

Von erheblicher Bedeutung für die Meßtechnik ist der Bereich jenseits von V_2 in Abb. 14. In diesem Bereich ist die elektrische Feldstärke so groß, daß sie den Ionen genügend Energie zur Ionisation weiterer Atome oder Moleküle übertragen kann. Auf diese Weise erhält man eine Verstärkung — die sogenannte Gasverstärkung — des primären Ionisationseffektes. Man verwendet für derartige „Zählrohre" zylindrische Anordnungen, deren Auffangelektroden aus dünnem koaxialem Draht bestehen. Im Bereich der Gasverstärkung bilden die primär erzeugten Ionen Sekundär-, Tertiär-, usw. Ionen. Der Effekt ist schließlich der, daß jedes erzeugte Elektron in seiner Nachbarschaft eine Lawine von n Elektronen bildet. Die zylindrische Anordnung hat den Vorteil, daß die elektrische Feldstärke mit geringer werdender Entfernung von der Innenelektrode proportional $1/r$ zunimmt. Der Bereich einer Stoßionisation wird dadurch auf geringe Abstände von der Zentralelektrode beschränkt. Bei Zunahme der Zählrohrspannung vergrößert sich dieser Bereich, und demzufolge wächst die Zahl der Elektronen in der Lawine.

Wäre der Prozeß der Stoßionisation der einzige, der zu einer Vermehrung der Ladungsträger führt, so würde die Lawine begrenzt sein, da die Bildung der Tochterladungen wachsend näher der Zentralelektrode erfolgt. Jedoch wird bei der Ionisation eine Photonenstrahlung erzeugt, die den Prozeß der Gasverstärkung wesentlich kompliziert. Als Folge des Photoeffektes dieser Strahlung im Gas und an den Elektroden werden neue Elektronen gebildet. Die Zahl der Photoelektronen ist proportional zur Zahl der Elektronen in der ersten Lawine, gleich γn, wo γ ein Proportionalitätsfaktor zur Zahl der Elektronen n ist. Diese γn Elektronen werden ebenfalls lawinenartig verstärkt, so daß sie γn^2 Elektronen liefern. Die Gesamtzahl der Elektronen, die zur Zentralelektrode gelangen, wird demnach durch die Reihe

$$n + \gamma n^2 + \gamma^2 n^3 + \dots$$

dargestellt. Mit wachsender Spannung wird n größer. Wenn die Spannung genügend gering ist, so daß $\gamma n < 1$ bleibt, ist die Summe der Reihe

$$\sum = \frac{n}{1 - \gamma n}. \tag{3.6}$$

Man erkennt, daß die Gesamtionisation, also die Gesamtzahl der Elektronen, die auf den Auffänger gelangen kann, proportional zur Anfangsionisation ist. $\sum$ nennt man den Koeffizienten der Gasverstärkung. Ein Zählrohr, das derartigen Bedingungen entspricht, wird „Proportionalzählrohr" genannt. Der Koeffizient für die Gasverstärkung beträgt etwa 100 und weniger. Bei höheren Verstärkungsfaktoren wird es schwierig, die Betriebsbedingungen so konstant zu halten, daß sich der Verstärkungsgrad über längere Zeiten nicht ändert.

Ist die Spannung am Zählrohr genügend hoch, so wird $\gamma n > 1$. In diesem Falle divergiert die Reihe Gl. (3.6), und es setzt Entladung ein. Ist γn unwesentlich größer als 1, so kann die Entladung unselbständig bleiben. Unter diesen Umständen ist das Zählrohr in der Lage, jedes auftreffende Teilchen — auch die am Rande

streifend eintretenden — zu zählen. Nach den Autoren nennt man es Geiger-Müller-Zählrohr oder Entladungszählrohr. Die Amplituden der Ausgangsimpulse sind in diesem Falle von der Größenordnung einiger Volt, sind also leicht zu messen. Die Proportionalität zwischen Eingangs- und Ausgangsimpulsen ist jedoch nicht mehr vorhanden. Teilchen, die sich in ihrer Ionisationswirkung sehr unterscheiden, wie β-Teilchen einerseits und Protonen oder α-Teilchen andererseits, liefern jedoch Ausgangsimpulse unterschiedlicher Größe. Im allgemeinen ist γn bei derartigen Zählrohren so groß, daß die Löschung der Entladung auf künstlichem Wege erfolgen muß. Dies geschieht durch Beimengung von organischen Dämpfen, z. B. Alkohol oder Halogeniden. Derartige Zählrohre werden selbstlöschende genannt. Durch Einführung eines hohen Widerstandes in den Stromkreis kann, da mit wachsendem Entladungsstrom der Spannungsabfall am Widerstand wächst und somit die Zählrohrspannung soweit reduziert wird, daß keine Entladung mehr stattfinden kann, das Zählrohr zum Erlöschen gebracht werden, doch wird im allgemeinen dadurch die Impulsdauer groß. Mit elektronischen Schaltungen, die die Spannung am Zählrohr reduzieren, kann ein kurzzeitiges Löschen der Entladung erreicht werden. Die letztgenannten Arten von Zählrohren registrieren alle einfallenden Teilchen, wobei die Ausgangsimpulse unabhängig von der Primärionisation werden. Sie sind daher nicht zur Energiemessung, sondern nur zur Zählung von Teilchen geeignet.

Zur Registrierung der nichtionisierenden Neutronenstrahlen bedarf es eines Konverters. Als solche können (seltener) Paraffinschichten an der Innenwand der Elektroden dienen oder Kernreaktionen — $^{10}_{5}B\,(n, \alpha)$ —, die in der Gasfüllung erfolgen. Im erwähnten Falle dient BF_5, oftmals gemischt mit Argon, als Kammerfüllung.

3.3. Spurenkammern

Die von C. T. R. Wilson 1911 entwickelte Nebelkammer gestattet es, die Bahnen ionisierender Teilchen direkt sichtbar und photographierbar zu machen. In einem Gefäß mit übersättigtem Wasserdampf — die Übersättigung geschieht durch rasche Expansion des Volumens — wirken die von den Teilchen erzeugten Ionen als Kondensationskerne. Bei geeigneter Beleuchtung wird die Spur des Teilchens als Kette von Wassertröpfchen sichtbar. Naturgemäß bedurfte es umfangreicher Untersuchungen, um optimale Bedingungen für den Grad der Expansion, die Freiheit von Wirbelbildung bei rascher Expansion mit dem Ziel möglichst enger und scharf definierter Bahnspuren zu erreichen.

Die Wilson-Kammer hat den großen Vorteil, daß man die räumliche Orientierung der Teilchenbahnen durch stereoskopische Aufnahmen feststellen kann. Bei Einfügung geeigneter Materialien in die Kammern lassen sich die Absorption von Teilchen sowie durch sie hervorgerufene Kernprozesse direkt beobachten. Kammertypen, die im Magnetfeld angeordnet sind, gestatten das Vorzeichen der Teilchenladung und den Teilchenimpuls zu bestimmen. Da die Ionisationsdichte von Teilchen (und damit der Durchmesser der Teilchenspur) entsprechend

Gl. (4.7) $J \sim Z^2 f(v)$ ist, kann man deren Ladung oder Geschwindigkeit auch ohne Magnetfeld abschätzen. Das ist bei der Nebelkammer nicht mit höherer Genauigkeit möglich, doch lassen sich qualitative Entscheidungen aus der Tröpfchendichte durchaus treffen.

Die hohe Bedeutung für kernphysikalische Messungen und für Messungen der kosmischen Strahlung, die die Wilson-Kammer erlangt hatte, führte dazu, weitere Verfahren zum Sichtbarmachen der Bahnspuren von Teilchen zu erdenken. Nachteile der Nebelkammer sind ihre kurze Arbeitsbereitschaft, die in der Größenordnung von Zehntelsekunden liegt, und die verhältnismäßig lange Zeit von etwa 10 bis 30 s, die zur Wiederherstellung der Registrierfähigkeit notwendig ist. Die „Diffusions-Nebelkammer" (Langsdorf 1939) stellt eine Weiterentwicklung der Wilson-Kammer dar. Während bei der Wilson-Kammer die Übersättigung des Dampfes durch Expansion des Volumens erreicht wurde, geschieht dies in der Diffusionskammer durch ein stationäres Temperaturgefälle in einem geeigneten Dampf, z. B. Alkohol. Die Grundplatte einer solchen Kammer wird auf tiefer Temperatur von etwa —50°C gehalten, wobei der Dampfdruck annähernd null ist. Der von der warmen oberen Platte zur kalten unteren diffundierende Dampfstrom wird in den Schichten geringerer Temperaturen wachsend übersättigt. Man erhält einen Bereich, in dem der Grad der Übersättigung zur Spurbildung für Teilchen geeignet ist. Eine derartige Kammer ist, mit wenigen Zusätzen an Apparaturen versehen, dauernd registrierfähig. Die Höhenausdehnung der geeigneten Dampfschicht ist jedoch nur gering und beträgt bis zu etwa 8 cm. Derartige Kammern lassen sich mit großen Arbeitsflächen von einigen Quadratmetern herstellen und mit Drücken bis zu etwa 50 Atm konstruieren. Ihre Verwendung hat im Bereich der Teilchen hoher Energien und bei der kosmischen Strahlung erhebliche Bedeutung gewonnen.

Schließlich gelang es Glaser 1953, einen weiteren Typ der Teilchenspurkammern zu entwickeln, die Blasenkammer. Das Prinzip der Arbeitsweise dieser Kammer ist folgendes: Unter höheren Drücken befindet sich eine geeignete Flüssigkeit — Äther, Propan, Xenon, Wasserstoff u. a. — auf einer Temperatur oberhalb des Siedepunktes bei Normaldruck. Je nach der Art der verwendeten Flüssigkeit sind hierbei die Drücke von der Größenordnung bis zu 40 Atm. Durch plötzliche Druckverminderung wird die Flüssigkeit in überhitzten Zustand gebracht, und es beginnt die Bildung von Gasbläschen; schließlich gerät die Flüssigkeit ins Sieden. Während der kurzen Dauer des Siedeverzuges — bis zu einigen Zehntelsekunden — ist die Kammer für die Bildung von Blasenspuren entlang der Bahn des ionisierenden Teilchens empfindlich. Die Spur der Teilchen ist von ausgezeichneter Schärfe. Wegen der notwendigen Drücke ist die Technologie derartiger Kammern nicht einfach. Die große Dichte des Mediums (Flüssigkeit) gestattet es, Teilchen hoher Energien über große Energiebereiche zu verfolgen. Derartige Kammern haben in den letzten Jahren in wachsendem Umfang Verbreitung erfahren und bedeuten eines der wichtigsten Hilfsmittel für die Experimente auf dem Gebiete der Teilchen höchster Energien und der Physik der Elementarteilchen.

Ein weiteres Verfahren, das in den letzten Jahren ebenfalls erhebliche Bedeutung zum Sichtbarmachen und zum Ausmessen der Bahnspuren geladener Teilchen gewonnen hat, ist unter Verwendung der „Gasentladungs-Spurenkammern" und

„Funkenkammern“ entwickelt worden. Das Prinzip dieser Anordnungen ist folgendes: Legt man an eine gasgefüllte Kammer mit lichtdurchlässigen, leitenden Wänden kurz nach Durchgang eines Korpuskularstrahles einen kurzzeitigen Impuls hoher Spannung, so bildet sich um die Bahn des ionisierenden Teilchens eine leuchtende Spur. Zur Herstellung dieser Erscheinung bedarf es sehr reiner Gase bestimmter Zusammensetzung — Edelgase und Edelgasgemische —, die geringe Elektronenaffinität besitzen. Der kurze Impuls muß, zur Erzeugung von Spuren geringer Durchmesser, in Zeitintervallen einiger Zehntel Mikrosekunden nach dem Durchgang des Teilchens erfolgen. Die durch den Spannungsimpuls beschleunigten Elektronen regen die Gasatome zur Lichtemission an. Die auf diese Weise gebildeten Leuchtspuren von 1 bis 2 mm Durchmesser können direkt photographisch registriert werden. Durch andere Registriervorrichtungen (Kristalle, Zählrohre), die das Teilchen vor dem Durchsetzen der Kammer passiert, erfolgt die Auslösung und Steuerung des Impulses an der Kammer. Man erkennt, daß diese Anordnungen zunächst nur für Teilchen hoher Energien anwendbar sind, bei denen die Energieverluste im Zählrohr oder anderen Signalgeräten, die das Teilchen vor dem Eintritt in die Kammer durchsetzen muß, zu vernachlässigen sind oder in Rechnung gesetzt werden können. Mehrere Varianten dieses Prinzips, zum Teil mit Kammern, die in einzelne dünnwandige Schichten unterteilt sind, sind für energiereiche Teilchen in Anwendung. Der im Vergleich zur Blasenkammer geringe apparative Aufwand und die Stabilität derartiger Anlagen hat zu ihrer raschen Verbreitung beigetragen (vgl. Tabelle 5).

Tabelle 5. Wichtige Charakteristika der Kammern

Kammertyp	Arbeitszyklus	Dauer der Empfindlichkeit s	Durchmesser der Teilchenbahn mm	Empfindlichkeit für parasitäre Strahlen	Innere Targets
Wilson-Kammer	Minuten	0,1 bis 2	1	mittel	möglich
Diffusionskammer	10 s	∞	0,2	sehr empfindlich	schlecht
Blasenkammer	10 s bis 1 min	0,1 bis 1	0,1 bis 0,5	mittel	möglich
Spurenkammer	$\approx 10^{-3}$ s	$2 \cdot 10^{-6}$	1 bis 2	gering	möglich

3.4. Szintillationszähler

Bereits zu Anfang dieses Jahrhunderts wurde durch ELSTER und GEITEL, CROOKES u. a. beobachtet, daß α-Strahlen in einer Reihe von Substanzen — z. B. in fluoreszierendem Zinksulfid — Lichtblitze hervorrufen, sogenannte Szintillationen, die mit Hilfe von Lupen oder Mikroskopen wahrgenommen werden

können. Diese Methode war zunächst die wichtigste zum Nachweis einzelner Korpuskularstrahlen, vorzugsweise von α-Teilchen, aber auch von Protonen. Nachdem elektrische Methoden — Ionisationskammer und Zählrohre — entwickelt worden waren, wurde diese subjektive Methode als unzureichend mehr als zwei Jahrzehnte lang nicht verwendet. Erst nach Entwicklung von Lichtverstärkern, den Sekundär-Elektronen-Vervielfachern (SEV oder englisch Photomultiplier), wurde diese Methode 1946—1947 durch KALLMANN wieder aufgegriffen. Die schwachen Lichtimpulse von Szintillatorkristallen konnten durch die SEV in meßbare, elektrische Impulse umgewandelt werden. Derartige „Szintillationszähler" besitzen ein sehr hohes Auflösungsvermögen, d. h., sie erzeugen Lichtblitze von der Dauer 10^{-8} bis 10^{-9} s und gestatten daher sehr hohe Zählgeschwindigkeiten. In ihren verschiedenen Ausführungsformen als feste, flüssige, gasförmige und plastische Substanzen zählen sie zu den wichtigsten Nachweismitteln für Korpuskularstrahlen.

Auch die direkte Messung der beim Durchgang von Teilchen in Kristallen (und z. B. auch in flüssigem Argon) erzeugten Ionen ist unter Verwendung genügend hoher elektrischer Feldstärken möglich. Im Zusammenhang mit geeigneten Halbleiterdioden, die derzeit sehr an Bedeutung für den Strahlennachweis gewonnen haben, hat dieser Effekt wachsende Bedeutung erlangt.

3.5. Photoemulsionen

Photoemulsionen sind in weitem Umfang zum Nachweis und zur Reichweitenmessung von geladenen Teilchen hoher Energien verwendet worden. Daß Photoschichten durch radioaktive Strahlung geschwärzt werden, wurde schon 1886 von BECQUEREL beobachtet. Zu Anfang dieses Jahrhunderts gelang es, individuelle Spuren einzelner α-Teilchen in Photoemulsionen nachzuweisen. Zur Beobachtung von Kernumwandlungsprozessen wurde diese Methode insbesondere 1925 in Wien durch M. BLAU und H. WAMBACHER und schließlich in den vierziger Jahren durch C. F. POWELL zu hoher Vollkommenheit entwickelt. POWELL gelang mit dieser Methode 1947 die Entdeckung des π-Mesons und seiner Zerfallsprodukte.

Wie bei jedem photographischen Prozeß ist die Anzahl der HgBr-Kristalle, die in Silberkörner umgewandelt werden, von zahlreichen Faktoren, wie Empfindlichkeit der Emulsion sowie Art und Dauer des Entwicklungsprozesses, abhängig. Es ist daher nur möglich, für individuelle Emulsionstypen die Abhängigkeit der Korndichte von der Energie der gemessenen Strahlung anzugeben. Das Anwachsen der Schwärzungszentren und ihre Verschmelzung hängen vom Entwicklungsprozeß ab, so daß jeweils umfangreiche Kontrollen dieser Faktoren notwendig sind. Wie aus Gl. (4.6) folgt, ist für Teilchen der Geschwindigkeit β und der Ladung Z der Energieverlust $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x = Z^2 f(\beta)$ oder die Reichweite des Teilchens nach Gl. (4.8) $R = (M/Z^2)\, f(\beta)$. Von Bedeutung für die Bestimmung der charakteristischen Teilcheneigenschaften ist weiterhin die „Vielfachstreuung". Diese hat zur Folge, daß Teilchen beim Durchsetzen von Atomen längs ihres Weges geringe Ablenkungen von ihrer ursprünglichen Richtung erfahren. Diese summieren

sich zu einem resultierenden, mittleren Ablenkungswinkel $\bar{\alpha}$. Dieser Winkel $\bar{\alpha}$ ist abhängig von der Geschwindigkeit β, dem Impuls p und der Ladung Ze des Teilchens:

$$\bar{\alpha} = C\,\frac{Ze}{p\beta},$$

worin C einen Koeffizienten bedeutet, der schwach vom Impuls und der Ausdehnung des Bereiches, innerhalb dessen die Streuung beobachtet wird, abhängt.

Photographische Emulsionen haben im allgemeinen Schichtdicken von etwa 10 µm. Für die Beobachtung von Kernprozessen würden diese eine äußerst geringe Effektivität ergeben. Es sind Spezialschichten von einigen Millimetern Dicke entwickelt worden. Sie werden ohne Träger zu Paketen zusammengeschichtet und vor der Entwicklung getrennt. Auf diese Weise sind Emulsionspakete von mehr als 10 Litern Inhalt hergestellt worden. Man schließt unschwer daraus, daß derartige Emulsionspakete von Flugzeugen oder Raumschiffen mitgeführt und zur Registrierung der kosmischen Strahlung in großen Höhen verwendet werden können. Die Bedeutung der photographischen Methoden ist im Gebiet der kosmischen Strahlung und der Kernphysik hoher Energien außerordentlich groß.

Abschließend ist zu erwähnen, daß die verschiedenen Spezies von Kammern für Bahnspuren ionisierender Teilchen einschließlich der Photomethode zu so hohen Zahlen von photographischen Aufnahmen führen, daß deren Bearbeitung weitgehend automatisiert worden ist. Auch die Vermeidung des Umweges über die Photographie und spätere Auswertung der Photos wird derzeit intensiv bearbeitet. Auf die Einzelheiten dieser interessanten Entwicklungen, die freilich einen bedeutenden Aufwand an feinmechanischen Geräten und an Elektronik erfordern, sei in diesem Zusammenhange nur hingewiesen.

3.6. Čerenkov-Strahlung

Schon kurz nach der Entdeckung der radioaktiven Strahlung wurde beobachtet, daß α-, β- und γ-Strahlen eine Anzahl von Substanzen zu kräftiger Lumineszenz anregen. Darüber hinaus wurde bei Strahlen hoher Energien in fast allen lichtdurchlässigen Materialien eine sehr schwache Lumineszenz beobachtet. Die Natur dieser Strahlung wurde im Laboratorium von Wawilow durch Čerenkov eingehender untersucht. Čerenkov beobachtete die in Wasser von einem Bündel intensiver γ-Strahlen angeregte Strahlung im sichtbaren Spektralbereich und stellte fest, daß sich diese Strahlung wesentlich anders verhält als die bekannte intensive Lumineszenzstrahlung. Es ergab sich eine ausgesprochene Richtungsabhängigkeit dieser Strahlung, die eine kegelförmige Ausbreitung in bezug auf den einfallenden Strahl als Achse zeigt.

Die Deutung dieses Effektes wurde von Frank und Tamm gegeben: Beim Durchgang eines schnellen geladenen Teilchens durch Materie tritt, wenn die Geschwindigkeit des Teilchens die des Lichtes in dem betreffenden Medium überschreitet, ein Ausbreitungseffekt der in der Materie angeregten Lichtstrahlung auf,

ähnlich wie er von MACH für die Ausbreitung von Schallwellen bei Überschallgeschwindigkeit des bewegten Körpers gefunden wurde. Abbildung 16 veranschaulicht die Ausbreitung der Čerenkov-Strahlung. Der halbe Öffnungswinkel des Kegels, unter dem die Čerenkov-Strahlung emittiert wird, ist

$$\cos\Theta = \frac{1}{\beta n}, \tag{3.7}$$

$c\beta$ = Geschwindigkeit des Teilchens, c = Lichtgeschwindigkeit. Das Spektrum des emittierten Lichtes erstreckt sich über alle Frequenzen, für die die Ausbrei-

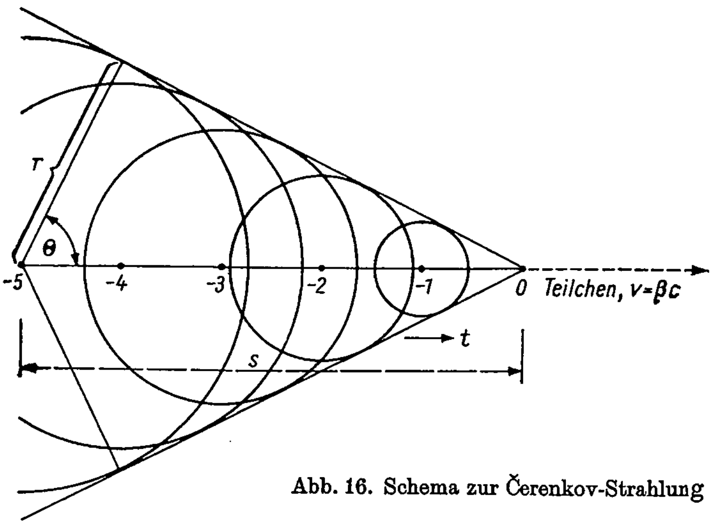


Abb. 16. Schema zur Čerenkov-Strahlung

tungsgeschwindigkeit in dem betrachteten Medium kleiner als die Teilchengeschwindigkeit ist. Für die Intensitätsverteilung ergibt sich

$$J = \frac{2\pi Z^2}{137}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\sin^2\Theta, \tag{3.8}$$

wobei J die Anzahl der Photonen pro 1 cm Weg im betrachteten Material, Z die Ladungszahl des Teilchens, λ_1 und λ_2 die Grenzen des zur Beobachtung gelangenden Lichtes sind. Aus der Gleichung ist ersichtlich, daß die Intensität der Strahlung nur von der Ladung und der Geschwindigkeit, nicht aber von der Energie oder dem Impuls der Teilchen abhängt. Als Funktion der Lichtfrequenz geschrieben, erhält Gl. (3.8) die Form

$$N(\nu)\,d\nu = 2\pi\,\frac{e^2 Z^2}{\hbar c}\left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right) = \frac{2\pi Z^2}{137\,c}\sin^2\Theta\,d\nu. \tag{3.9}$$

Der große Wert des Čerenkov-Effekts für die Physik der Teilchen hoher Energien liegt darin, daß er ein neues Hilfsmittel für die Bestimmung der Korpuskularstrahlen liefert.

Da das emittierte Licht eine gegebene Richtung besitzt, kann man durch geeignete Maßnahmen die in der Umgebung großer Teilchenbeschleuniger immer vorhandene diffuse Störstrahlung sehr weitgehend ausschalten. Diese Möglichkeit bieten Szintillationszähler nicht, ihre Anwendung macht daher Anordnungen komplizierter Systeme mehrfacher Koinzidenzen bzw. Antikoinzidenzen notwendig. Die außerordentlich kurze Zeitdauer des Lichtimpulses ermöglicht es, mit sehr schnellen Koinzidenzanordnungen zu arbeiten. Die Begrenzung des zeitlichen Auflösungsvermögens ist derzeit durch das der SEV gegeben ($\approx 10^{-9}$ s).

Die Intensität der Strahlung ist jedoch gering. Um eine Vorstellung hiervon zu erhalten, sei Gl. (3.8) für ein konkretes Beispiel ausgewertet. Es sei $n = 1{,}33$ und $\beta^2 = 0{,}75$, was für Elektronen einer Energie von etwa 500 keV entsprechen würde. Man erhält für den Bereich des sichtbaren Spektrums von $\lambda_1 = 4{,}6 \cdot 10^{-5}$ cm bis $\lambda_2 = 6 \cdot 10^{-5}$ cm einen Betrag von etwa 100 Photonen pro 1 cm Weg des Strahles. Derart geringe Photonenströme wurden erst nachweisbar, als die Technik der SEV-Geräte ein hohes Niveau erreicht hatte. Die ersten erfolgreichen Versuche begannen um 1947. Heute werden Čerenkov-Zähler in erheblichem Umfang in der Physik der Teilchen höchster Energien verwendet. Insbesondere zur Unterscheidung von Teilchen verschiedener Geschwindigkeiten haben Čerenkov-Zähler ihre weithin bekannt gewordene Anwendung beim Nachweis von Antiprotonen durch SEGRÉ und seine Mitarbeiter im Jahre 1955 erlangt. Eine große Anzahl von Anordnungen ist von den Experimentatoren für das Gebiet von Teilchen höchster Energien erdacht worden, wobei die Fokussierung von Teilchen bestimmter Geschwindigkeiten besonders zu erwähnen ist.

3.7. Beispiele für Meßverfahren. Koinzidenzanordnungen

Die physikalische Meßmethodik ist ohne umfangreiche elektronische Geräte nicht mehr denkbar. Die Kernphysik hat nicht nur in hohem Maß die Ergebnisse der Elektronik nutzen können, sondern ihrerseits wesentliche Anregungen zu deren Entwicklung gegeben. Proportionalverstärker, Impulsgeber, Zeitmeßgeräte, Geräte zur Zählung und Analyse von Teilchenimpulsen und zahlreiche weitere Anordnungen gehören zum notwendigen Fundament für Arbeiten auf dem Gebiet der Kernphysik. Im Zusammenhang mit diesen methodischen Fragen seien einige Anordnungen zur Messung von Koinzidenzen und Antikoinzidenzen in ihren Grundzügen skizziert.

Diese Anordnungen liefern die Möglichkeit, den zeitlichen Abstand zwischen Ereignissen — z. B. den Durchgang von Korpuskularstrahlen durch zwei Zählrohre — oder die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse festzustellen. Derartige Meßgeräte, die erstmalig von BOTHE und in etwas anderer Form von ROSSI 1933 verwendet wurden, dürften als die ersten sogenannten logischen Systeme zu bezeichnen sein.

Abb. 17 zeigt die Anordnung für Zweifachkoinzidenz nach Rossi. Zwei Zählrohre Z_1 und Z_2 sind mit ihren Zentralelektroden an je eine Elektronenröhre geschaltet. Wenn keines der beiden Zählrohre Strom führt, also im Ruhezustand, arbeiten die Röhren mit normalem Anodenstrom. Tritt ein ionisierendes Teilchen durch eines der Zählrohre, so fließt ein Strom durch das Zählrohr, der das Gitter der angeschalteten Verstärkerröhre so stark negativ auflädt, daß die Röhre praktisch gesperrt wird. Man erhält am Ausgang einen Impuls geringer Größe. Erst wenn beide Zählrohre gleichzeitig Strom führen, tritt ein Impuls erheblichen Betrages am Ausgang auf. Durch geeignete Wahl der Arbeitsbedingungen — Abschneiden (Diskriminieren) kleiner Impulse im nachfolgenden Verstärker — kann man erreichen, daß nur Impulse zur Messung gelangen, die einer gleichzeitigen

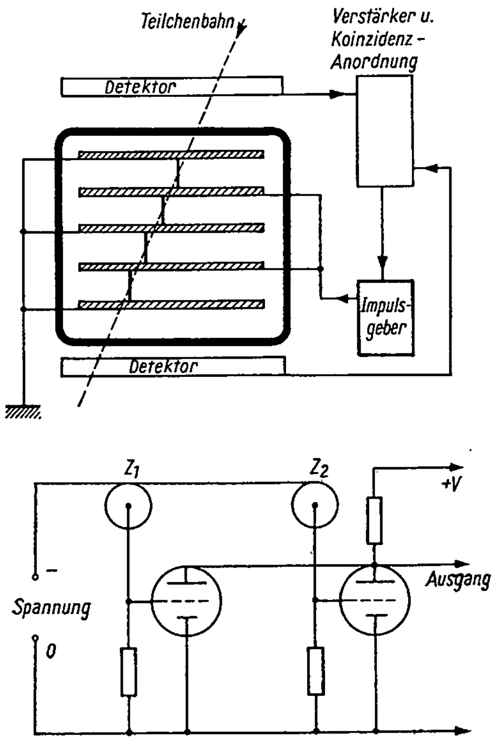


Abb. 17. Schema einer Anordnung zur Steuerung von Funkenkammern durch zwei Detektoren in Koinzidenzschaltung. Darunter: Koinzidenzschaltung nach Rossi

Anregung beider Zählrohre zugehören. Durch Einschalten von Verzögerungsgliedern (Laufzeitketten) zwischen den einzelnen Stufen lassen sich Ereignisse messen, die innerhalb geringer zeitlicher Abstände stattfinden. Eine abgeänderte Anordnung ermöglicht es, Messungen durchzuführen, bei denen nur eins der Zählrohre arbeitet. Das ist die sogenannte Antikoinzidenzschaltung.

Als Beispiel für die Anwendung derartiger Schaltungen sei die Auslösung einer Gasentladungskammer durch zwei Zählrohre in Koinzidenz oder Antikoinzidenz, je nach der Aufgabe, betrachtet (Abb. 17). Oberhalb und unterhalb der Kammer

sei je ein Detektor (ein Zählrohr oder eine Gruppe von Zählrohren) angeordnet, die bei Koinzidenz oder Antikoinzidenz die Kammer in Arbeitsbereitschaft versetzen. Bei Koinzidenzschaltung registriert man die Bahn eines Teilchens, das die gesamte Apparatur durchsetzt, im Falle der Antikoinzidenzschaltung würde das Teilchen nur das eine der Zählrohre durchsetzen, das andere jedoch nicht. Je nach der Art der Aufgabenstellung können die Zählrohre in verschiedenen Richtungen zum einfallenden Strahl angeordnet werden. Auf diese Weise kann man bestimmte Gruppen von Ereignissen auswählen, was, wie ohne weiteres zu übersehen ist, eine erhöhte Effektivität der Messungen bedeutet.

Abschließend noch einige Betrachtungen über das so wichtige Verfahren der Koinzidenzmessung. Da die Arbeitsbereitschaft eines Zählrohres sich über ein endliches Zeitintervall τ erstreckt, können zufällige Ereignisse, von parasitären Strahlen herrührend, eintreten. Abbildung 18 zeigt die Errechnung der Zahl zu-

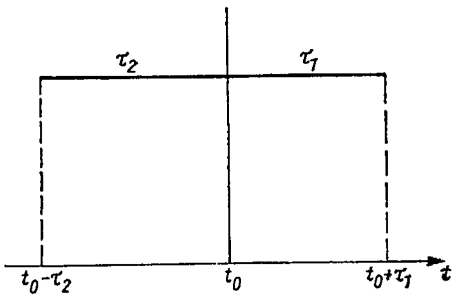


Abb. 18. Schema zur Errechnung zufälliger Koinzidenzen

fälliger Ereignisse für zweifache Koinzidenzen. Mit den Indizes 1 und 2 seien die dem 1. bzw. dem 2. Zählrohr entsprechenden Größen bezeichnet, mit τ die Zeitintervalle der Arbeitsdauer der Zählrohre, mit n die Teilchenzahlen, die pro Zeiteinheit die Zählrohre treffen. Man ersieht aus Abb. 18, daß ein Teilchen, das in das 2. Zählrohr zur Zeit $t_0 - \tau_2$ eingetreten war, noch in der Lage ist, in Koinzidenz mit einem Teilchen zu treten, das erst zur Zeit $t_0 + \tau_1$ in das 1. Zählrohr tritt. Die Zahl der zufälligen Koinzidenzen wird demnach $n_2 n_1(\tau_1 + \tau_2)$. Für $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ — eine Bedingung, die oft erfüllt ist — erhält man für die Zahl zufälliger Koinzidenzen $2n_1 n_2 \tau$.

Bei dreifachen Koinzidenzen mögen in das 1. Zählrohr n_1 Teilchen einfallen und gleichzeitig in die beiden anderen Zählrohre n_2 und n_3 Teilchen. Man erhält dann für die Zahl der Koinzidenzen $n_1(n_2\tau_2)(n_3\tau_3)$. Für das 2. Zählrohr gilt entsprechend $(n_1\tau_1)n_2(n_3\tau_3)$ und für das 3. Zählrohr $(n_1\tau_1)(n_2\tau_2)n_3$. Die Gesamtzahl der Dreifach-Koinzidenzen wird

$$n_1(n_2\tau_2)(n_3\tau_3) + (n_1\tau_1)n_2(n_3\tau_3) + (n_1\tau_1)(n_2\tau_2)n_3$$
$$= n_1 n_2 n_3 \tau_1\tau_2\tau_3 \left[\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3}\right].$$

Für $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ erhält man $3n_1 n_2 n_3 \tau^2$.

Als vergleichendes Zahlenbeispiel sei gewählt: $\tau = 10^{-6}$ s, $n_1 = n_2 = n_3$

Teilchenzahl n	Koinzidenzen pro Sekunde Zweifach-Koinzidenz	Dreifach-Koinzidenz
10^2	$2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-6}$
10	$2 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-9}$

Durch Dreifach-Koinzidenzen erzielt man gegenüber Zweifach-Koinzidenzen eine erhebliche Abnahme der zufälligen Koinzidenzen. Aufgabe des Experimentators ist es, die geeigneten Bedingungen zu wählen. Wie man sieht, sollte die Ansprechzeit der Zählrohre bzw. anderer Meßgeräte für Korpuskularstrahlen möglichst kurz sein, denn mit der Erhöhung der Zahl koinzidierender Systeme erhöht sich der experimentelle Aufwand beträchtlich.

4. DURCHGANG VON STRAHLUNG DURCH MATERIE

4.1. Schwere Teilchen

Fast die gesamte Masse des Atoms, das einen Durchmesser von der Größenordnung 10^{-8} cm besitzt, ist in seinem Zentrum, dem positiv elektrisch geladenen Atomkern, konzentriert. Der Kerndurchmesser ist von der Größenordnung 10^{-12} cm, die Dichte der Kernmaterie liegt bei etwa 10^{14} g/cm³. Diese Vorstellung, daß das Atom aus einer Elektronenhülle und einem Kern derart geringer Ausdehnung besteht, verdankt man E. RUTHERFORD (1911), dessen Ideen auf Experimenten von LENARD und THOMSON basieren. Die Methode, auf Grund derer sich die Größe der Atome und Atomkerne ermitteln läßt, beruht auf dem Studium der Erscheinungen beim Durchgang von Korpuskularstrahlen durch Materie. Bei den frühesten Beobachtungen wurden hierzu Katodenstrahlen verwendet, später, nach Entdeckung der Radioaktivität durch H. BECQUEREL (1896) und ihrer eingehenden Untersuchung insbesondere durch das Ehepaar P. und M. CURIE (1898), dienten die α- und β-Strahlen der natürlich-radioaktiven Körper zu weiteren Experimenten. Diese Auskunftsmittel bezüglich der Wechselwirkung von Strahlen hoher Energien mit Materie sind bis heute als zu den wichtigsten in der Physik der Atomkerne gehörend anzusehen.

4.1.1. Stoßparameter

Die wesentlichsten Wechselwirkungen zwischen geladenen Korpuskeln und den Atomen der Materie sind durch die elektrischen Kräfte zwischen den Teilchen und den Elektronen der Atomhüllen bedingt. Betrachten wir zunächst die Wechselwirkung eines geladenen schnellen Teilchens mit einem Elektron der Atomhülle. Ladung, Masse und Geschwindigkeit des Korpuskels seien Ze, M und v, wobei e das elektrische Elementarquant bedeutet (Abb. 19). Das Elektron sei als frei be-

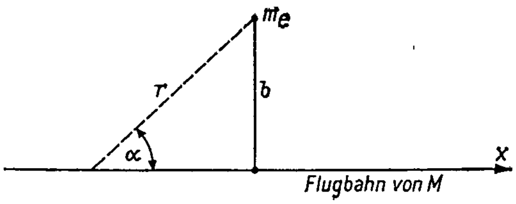


Abb. 19. Zur Berechnung der Energieabgabe eines schweren Teilchens (ZeM) an ein Elektron (m_e)

trachtet und seine Geschwindigkeit so gering, daß seine Ortsveränderung während der Dauer der Wechselwirkung vernachlässigt werden kann. Das Teilchen fliege in einem Abstand b, dem Stoßparameter, an dem Elektron vorbei. Wird die elektrische Coulomb-Kraft zwischen den beiden Teilchen als $\boldsymbol{F}$ bezeichnet, so ergibt sich der an das Elektron abgegebene Impuls zu $\int \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$. Unter der Annahme, daß die Richtungsänderung der Korpuskeln, deren Masse M groß gegen die Masse des Elektrons sei (α-Teilchen, Protonen), vernachlässigt werden kann, was durch experimentelle Ergebnisse bestätigt wird, ergibt sich für die Impulskomponenten parallel und senkrecht zur Geschwindigkeitsrichtung des anfliegenden Teilchens:

$$\mathrm{d}p_= = \int F_= \,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \mathrm{d}p_\perp = \int F_\perp \,\mathrm{d}t.$$

Die Zeitdauer der Wechselwirkung zwischen Korpuskel und Elektron ist $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v}$. Für die Kraftkomponenten erhält man

$$F_= = \frac{Ze^2}{r^2}\frac{x}{r}, \qquad F_\perp = \frac{Ze^2}{r^2}\frac{b}{r}.$$

Für die Impulse der beiden Komponenten folgt

$$p_\perp = \frac{Ze^2 b}{v}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+b^2)^3}} = \frac{2Ze^2}{bv},$$

$$p_= = \frac{Ze^2}{v}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+b^2)^3}} = 0.$$

Das zweite Resultat ($p_= = 0$) ist auch ohne Rechnung erkennbar, denn die Parallelkomponente ändert ihr Vorzeichen an der Stelle $x \neq 0$. Für den auf das Elektron übertragenen Impuls erhält man also: $p = 2Ze^2/bv$. Die dem Elektron übertragene Energie wird dann:

$$\frac{p^2}{2m_e} = \frac{2Z^2e^4}{m_e v^2 b^2}. \tag{4.1}$$

Beim Durchgang durch Materie findet Wechselwirkung des Korpuskularstrahles mit zahlreichen Elektronen — n pro 1 cm^3 — statt, wobei Stoßparameter b aller Größen möglich sind. Da die übertragene Energie von dem Stoßparameter abhängt, hat man über alle möglichen b-Werte zu mitteln. Die Anzahl der Zusammenstöße pro Wegeinheit des Teilchens, für die b im Intervall von b bis $b + \mathrm{d}b$ liegt, ist gleich der Zahl der Elektronen, die sich pro Längeneinheit in einem Rohr mit dem inneren Radius b und dem äußeren $b + \mathrm{d}b$ befindet, also $2\pi b\,\mathrm{d}b \cdot n$ (Abb. 20). Die Energie, die das Teilchen längs einer Flugstrecke gleich der Längeneinheit an die Elektronen in dem bezeichneten Rohrstück abgibt, ist

$$\mathrm{d}E(b) = \frac{4\pi Z^2 e^4 n}{m_e v^2}\frac{\mathrm{d}b}{b}.$$

Die gesamte Energieabgabe an alle möglichen Hohlzylinder mit den Extremwerten b_{min} und b_{max} wird dann:

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{4\pi Z^2 e^4 \cdot n}{m_e v^2} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}. \tag{4.2}$$

Die Hauptaufgabe für die weiteren Betrachtungen besteht darin, die möglichen Werte für b_{min} und b_{max} zu finden. Offenbar kann weder $b_{max} = \infty$ noch $b_{min} = 0$

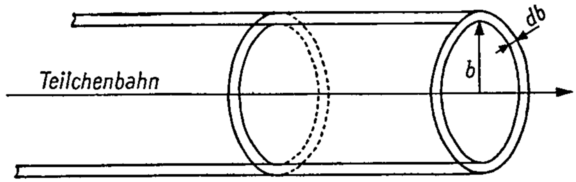


Abb. 20. Teilchenbahn mit einem Stoßparameter zwischen b und $b + \mathrm{d}b$

werden. Die Errechnung der beiden Werte bietet erhebliche Schwierigkeiten. Es seien daher im folgenden nur einige Gesichtspunkte für die Abschätzung von b_{max} und b_{min} gegeben.

Maximalwert von b. Für große b-Werte wird die Wechselwirkung des Teilchens mit dem Elektron gering, und damit wird der Betrag der übertragenen Energie vergleichbar mit der Bindungsenergie des Elektrons im Atom. Die Elektronen können demnach für große b nicht mehr als frei betrachtet werden. Schließlich reicht bei großen b-Werten die übertragene Energie nicht mehr zur Anregung von Atomen aus. Die Bindungsenergien der Elektronen im Atom müssen daher in irgendeiner Form das b_{max} bestimmen. Weiterhin sind, da erhebliche Teilchengeschwindigkeiten auftreten können, relativistische Effekte zu berücksichtigen. Im Falle relativistischer Bewegung nimmt das elektrische Feld in der Bewegungsrichtung ab. Senkrecht dazu ist jedoch eine Zunahme der Feldstärke vorhanden, und zwar um einen Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta = \frac{v}{c}.$$

Die Dauer der Wechselwirkung nimmt ab, da infolge der Lorentz-Transformation für die Dauer τ der Wechselwirkung zu setzen ist $\tau = \tau_0 \sqrt{1-\beta^2}$, also $\tau = \frac{b}{v} \sqrt{1-\beta^2}$. Der gesamte Kraftimpuls ändert sich nicht, da er das Produkt von der Feldstärke $F_\perp$ und der Dauer der Wechselwirkung enthält. b_{max} muß deshalb so gewählt werden, daß die Beziehung

$$\frac{1}{\nu} > \tau \approx \frac{b\sqrt{1-\beta^2}}{v}, \qquad \nu = \text{Schwingfrequenz},$$

für den gesamten Integrationsbereich von b erfüllt ist. Man kann dann für b_{max} folgenden Wert annehmen:

$$b_{max} = \frac{v}{\bar{\nu}\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{4.3}$$

$\bar{\nu}$ ist die mittlere Schwingfrequenz der angeregten Atome für das bremsende Medium.

Minimalwert von b. Bei klassischer Betrachtung kann die Geschwindigkeit, die dem Elektron maximal übertragen wird, nicht größer sein als $2v$, d.i. beim geraden zentralen Stoß, für den $p_{max} = 2mv$ und die maximal übertragene Energie also $(m_e/2)\,(2v)^2$ ist. Man erhält dann mit Gl. (4.1)

$$\Delta E = \frac{2Z^2e^4}{m_e v^2 b^2} \leqq 2m_e v^2.$$

Für b_{min} folgt dann

$$(b_{min})_{kl} \approx \frac{Ze^2}{mv^2}. \tag{4.4}$$

Kleinere Beträge von b sollen daher von der Integration ausgeschlossen werden.

Aus den Gesetzen der Quantenmechanik folgt, daß der Drehimpuls $mv\,b$ gleich einem ganzzahligen Vielfachen von $\hbar$ ist. Bei kleinen Werten von b und großen Drehimpulsen sind die klassischen Beziehungen daher nicht mehr richtig. Als Minimalwert für b wählt man die De-Broglie-Wellenlänge $\lambda\!\!\!^{-}$ des Elektrons für ein Koordinatensystem, dessen Nullpunkt in dem einfallenden Teilchen ruht. Bei schweren Teilchen fällt das Koordinatensystem sehr nahe mit dem Schwerpunktsystem zusammen. Unter Berücksichtigung der relativistischen Massenänderung erhält man

$$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar\sqrt{1-\beta^2}}{m_e v}.$$

Unter der Annahme, daß nur Beträge von $b > \lambda\!\!\!^{-}$ Sinn haben, folgt

$$(b_{min})_{qu} = \frac{\hbar\sqrt{1-\beta^2}}{m_e v}. \tag{4.4a}$$

Durch Einsetzen der Werte für b_{max} und b_{min} aus den Gl. (4.3) und (4.4a) in Gl. (4.2) erhält man für den differentiellen Energieverlust

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{4\pi Z^2 e^4 n}{m_e v^2} \ln \frac{m_e v^2}{\hbar\bar{\nu}(1-\beta^2)}. \tag{4.5}$$

Die genauere Durchrechnung ergibt

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{4\pi Z^2 e^4 n}{m_e v^2}\left[\ln \frac{2m_e v^2}{\bar{J}(1-\beta^2)} - \beta^2\right]. \tag{4.6}$$

$\bar{J}$ bedeutet die mittlere Ionisierungsarbeit für die Atome des bremsenden Mediums, der Faktor $-\beta^2$ ergibt sich aus relativistischen Betrachtungen für weiter entfernte Elektronen (größere b-Werte) infolge der Zusammendrängung des Coulomb-Feldes für hohe Geschwindigkeiten. Die Größe $-\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ wird „Bremsvermögen" oder „Ionisationsbremsung" genannt.

Wie Gl. (4.6) zeigt, hängt das Bremsvermögen nicht von der Masse des zu betrachtenden Teilchens ab. Es ist proportional der Zahl n der Elektronen pro 1 cm³ des Bremsmediums und dem Quadrat der Ladung Ze der Teilchen sowie einer Funktion der Geschwindigkeit, $f(v) \sim \frac{1}{v^2}$,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \sim Z^2 e^2 n\, f(v). \tag{4.7}$$

Man erkennt, daß das Bremsvermögen für Teilchen gleicher Ladung und Geschwindigkeit, aber verschiedener Masse gleich groß ist. Teilchen gleicher Geschwindigkeiten, jedoch unterschiedlicher Massen haben Energien, die sich wie die Massen verhalten. Betrachten wir als Beispiel den Durchgang eines Protons und eines Deuterons durch Materie. Diese besitzen gleiche Ladung, ihre Massen verhalten sich aber wie 1:2. Die Beziehung für das Bremsvermögen sagt aus, daß für gleiche Geschwindigkeiten beider Teilchen $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ gleiche Werte hat. Da jedoch bei gleichen Geschwindigkeiten die Energie des Deuterons den doppelten Wert der des Protons besitzt, erhält man

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{P}}{\mathrm{d}x}\right)_{E_0} = \left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{D}}{\mathrm{d}x}\right)_{2E_0}.$$

Kennt man das Bremsvermögen für Protonen als Funktion der Energie, so findet man für das Deuteron das Bremsvermögen einfach durch Änderung des Energiemaßstabes um den Faktor 2.

In ähnlicher Weise kann aus dem Bremsvermögen für Protonen als Funktion ihrer Energie auf das für α-Teilchen geschlossen werden. Wegen der gegenüber dem Proton 4fachen Masse des α-Teilchens ist der Energiemaßstab um den Faktor 4 gegenüber dem des Protons zu ändern. Wegen der doppelten Ladung des α-Teilchens wird für die geänderten Energiewerte dessen Bremsvermögen um den Faktor 4 größer. Man erhält also (Gl. (4.6))

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}\right)_{E_0} \sim 1n\, f(v); \qquad \left(\frac{\mathrm{d}E_\alpha}{\mathrm{d}x}\right)_{4E_0} \sim 4n\, f(v).$$

Somit wird

$$4\left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}\right)_{E_0} = \left(\frac{\mathrm{d}E_\alpha}{\mathrm{d}x}\right)_{4E_0}.$$

Die Abhängigkeit des Bremsvermögens von der Art des Mediums ist, abgesehen von dem Ausdruck unter der Klammer von Gl. (4.6), charakterisiert durch die Zahl der Elektronen pro 1 cm³. Da die Zahl der Atome pro Kubikzentimeter $N = \frac{L}{A} \cdot \varrho$ (L = Loschmidtsche Zahl, ϱ = Dichte) beträgt, wird die Zahl der Elektronen pro

Volumeneinheit, $n = \frac{L}{A} \cdot Z \cdot \varrho$ (Z = Kernladungszahl), ein Bruch, der nur langsam mit wachsendem Atomgewicht A abnimmt. Aus diesem Grunde wird als Bremsvermögen vielfach nicht $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$, sondern $\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\xi}$ angegeben. Dabei bedeutet $\varrho\,\mathrm{d}x$ Masse pro Flächeneinheit, eine Größe, die dem Experimentator leichter zugänglich ist als die meist sehr geringe Dicke $\mathrm{d}x$. Die Tabellen 6 und 7 zeigen Beispiele für das Bremsvermögen einiger Substanzen gegenüber Protonen verschiedener Energie.

Tabelle 6. Bremsvermögen für Protonen

	H_2	Luft	Al	Au
Energieverlust, MeV cm²/g für $E_p = 0{,}1$ MeV	2900	620	417	87
Bremsvermögen relativ zu Luft				
für $E_p = 0{,}1$ MeV	0,33	1,00	1,26	1,92
für $E_p = 2$ MeV	0,21	1,00	1,53	4,64
für $E_p = 1$ GeV	0,16	1,00	1,69	8,35

Tabelle 7. Bremsvermögen von Luft für Protonen

E_p MeV	$\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ MeV cm²/g	E_p MeV	$\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ MeV cm²/g
0,1	625	5,0	72
0,2	577	10,0	40
0,3	522	20	23
0,4	450	30	16,6
0,5	385	50	11
0,7	300	100	6,5
1,0	230	200	4,0
2,0	143	300	3,1
3,0	105	500	2,4
		1000	2,0

4.1.2. *Reichweite*

Die Reichweite schwerer Teilchen läßt sich verhältnismäßig einfach mit erheblicher Genauigkeit experimentell bestimmen. Es ist daher wichtig, die Beziehung zwischen der Reichweite und der Energie von Teilchen zu kennen. Wie die Gleichungen (4.6) und (4.7) zeigen, ist $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x = f(E)$. Für den Weg x eines Teilchens, auf dem ein Energieverlust $E_0 - E$ eintritt, erhält man

$$x = -\int_0^E \frac{\mathrm{d}E}{f(E)} = \int_E^{E_0} \frac{\mathrm{d}E}{f(E)}\,.$$

Für die Reichweite R ergibt sich dann:

$$R = \int_0^E \frac{\mathrm{d}E}{f(E)}.$$

Mit Gl. (4.6) erhält man

$$R = \frac{M}{Z^2} \frac{m_e}{4\pi e^4 n} \int_{v_0}^{0} \frac{v^3 \,\mathrm{d}v}{B(v)}; \quad B(v) = \ln \frac{2 m_e v^2}{J(1-\beta)^2} - \beta^2. \tag{4.8}$$

Die Integration kann numerisch durchgeführt werden.

Da die Reichweite von Teilchen eine gut beobachtbare Größe ist, hat man eine Reihe halbempirischer Beziehungen zwischen Energie und Reichweite aufgestellt. Für Protonen in photographischen Emulsionen, wie sie zur Messung insbesondere an Teilchen der kosmischen Strahlung und zur Beobachtung von Kernprozessen bei künstlich hochbeschleunigten Teilchen Verwendung finden, hat man folgende Beziehung aufgestellt:

$$E_p = \alpha R_p^n = 0{,}25 R_p^{0{,}58},$$

E_p in MeV und R_p in Mikrometern gemessen.

Unsere Betrachtungen ermöglichen weiterhin einen Vergleich der Reichweiten von Teilchen verschiedener Ladungen und Massen. Aus den Gleichungen (4.5) und (4.6) folgt

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = M v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = Z^2 f(v) \quad \text{und} \quad \mathrm{d}x = \frac{M v \,\mathrm{d}v}{Z^2 f(v)}.$$

Für die Reichweite R ergibt sich hieraus

$$R = \frac{M}{Z^2} \int_0^v \frac{v \,\mathrm{d}v}{f(v)} = \frac{M}{Z^2} F(v).$$

Für Teilchen gleicher Geschwindigkeiten folgert man

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{M_1}{Z_1^2} : \frac{M_2}{Z_2^2}.$$

Ist $R_1 = R_p$ die Reichweite eines Protons und $Z_1 = 1$ dessen Ladung, bezeichnet man ferner mit $R_2 = R$ und $Z_2 = Z$ Reichweite und Ladung eines zweiten Teilchens gleicher Geschwindigkeit, so erhält man

$$R = R_p \frac{M}{M_p} \frac{1}{Z^2}. \tag{4.9}$$

Hieraus und aus der Verhältnisgleichung $E = E_p \dfrac{M}{M_p}$ in Verbindung mit dem oben angegebenen Ausdruck für E_p ergibt sich

$$E = \alpha \left(\frac{M_p}{M}\right)^{n-1} Z^{2n} R^n.$$

Diese Beziehung ist insbesondere zur Bestimmung der Energie schwerer Teilchen der Masse M und der Ladung Z aus ihrer Reichweite von Bedeutung. Der Faktor α und der Exponent n sind experimentell zu bestimmen. Sie sind von der Energie der Teilchen nicht unabhängig und für die notwendigen Zwecke tabelliert.

Schließlich sei, mehr aus historischen Gründen, erwähnt, daß bereits von GEIGER für die α-Teilchen der natürlichen radioaktiven Elemente, also für $3\,\text{cm} < R_\alpha < 7\,\text{cm}$, eine empirische Beziehung aufgestellt wurde: $R_\alpha = 0{,}318\, E_\alpha^{3/2}$, wo E_α in MeV, R_α in cm Luft einzusetzen ist.

4.1.3. Ionisation

Auf Grund klassischer Rechnungen hat THOMSON (1912) das Ionisierungsvermögen, also eine für die Messung sehr wichtige Größe, abgeschätzt. Die Energieabgabe der Teilchen an die Elektronen ist in Gl. (4.6) dargestellt. Aus Gl. (4.4) folgt $b_{\min}$, damit also die klassisch maximal mögliche Energieabgabe. THOMSON nahm an, daß die zur Ionisation notwendige Energieabgabe für alle Elektronen eines Mediums gleich groß sei. Die auf Grund dieser Vorstellungen erhaltenen Ergebnisse sind jedoch unbefriedigend, weil wichtige Grundlagen des Ionisationsprozesses nicht berücksichtigt wurden.

Der Mechanismus der Ionisation ist folgender: Bei der Wechselwirkung der Teilchen mit Elektronen erscheinen solche Prozesse wahrscheinlicher, bei denen geringe Energiebeträge abgegeben werden. Diese Energiebeträge können zwar zur Ablösung von Elektronen aus dem Atomverband ausreichen, sind jedoch nicht so hoch, daß die Elektronen ihrerseits Energieüberschüsse durch Ionisation abgeben können. Es treten jedoch auch Zusammenstöße auf, bei denen verhältnismäßig hohe Energiebeträge übertragen werden. Nach den vorhergehenden Ausführungen beträgt die maximal übertragbare Energie $E_e = 2 m_e v^2 = 4 \frac{m_e}{M} E_M$. Für Protonen einer Energie von 10 MeV beträgt die den Sekundärelektronen mitgeteilte Energie etwa 20 keV. Derartige δ-Elektronen sind bei Aufnahmen in der Nebelkammer deutlich nachzuweisen.

Infolge derartiger Prozesse ist zwischen direkter Ionisation und Sekundärionisation zu unterscheiden. Die Gesamtionisation ist die Summe beider Anteile. Aus den Experimenten folgt, daß die Gesamtionisation etwa dreimal so groß ist wie die direkte Ionisation. Die direkte Ionisation kann mit einiger Genauigkeit nur für atomaren Wasserstoff durchgerechnet werden.

Eine theoretische Behandlung des Ionisationsprozesses ist außerordentlich schwierig, weil er sich aus mehreren Prozessen zusammensetzt. Das sind die Stöße, die nur zur Anregung, nicht aber zur Ionisation führen, der direkte Ionisationsprozeß, bei dem aus dem Atomverband Elektronen herausgehoben werden, die keine Sekundärelektronen erzeugen können, und schließlich der Prozeß zur Erzeugung von δ-Elektronen und deren Ionisationseffekte. Diese Probleme sind derzeit noch nicht vollständig gelöst, und man verwendet gegebenenfalls halbempirische Beziehungen.

Glücklicherweise besteht eine andere Möglichkeit, aus der sehr genau und einfach durchführbaren Messung der Ionisation die Energie geladener Korpuskular-

strahlen genau zu bestimmen. Wie die Experimente ausweisen, ist die Ionisation des Teilchens beim Durchfliegen einer bestimmten Strecke in einem Gerät zur Ladungsmessung — Ionisationskammern verschiedenster Ausführungsformen, Halbleiterdetektoren — proportional seinem Energieverlust auf der durchlaufenen Strecke. Dies führt zur Betrachtung der zur Erzeugung eines Ionenpaares notwendigen Energie. Dieser Energiebetrag ist für jedes Gas innerhalb weiter Energiebereiche konstant. Tabelle 8 zeigt für einige Gase die zur Erzeugung eines Ionenpaares notwendige Energie.

Tabelle 8. Energieverluste von α-Teilchen und Protonen in einigen Gasen bei der Bildung eines Ionenpaares

Gas	E_p eV	$\frac{E_p\,(\text{Gas})}{E_p\,(\text{Ar})}$	E eV	$\frac{E_\alpha\,(\text{Gas})}{E_\alpha\,(\text{Ar})}$
H_2	35,3	1,38	36,6	1,38
He	29,9	1,13	44	1,67
Ne	28,6	1,08	36,8	1,39
N_2	36,6	1,38	36,3	1,37
O_2	31,5	1,19	32,4	1,23
Luft	35	1,32	35,3	1,34
Ar	26,5	1,0	26,4	1
CO_2	34,4	1,3	34,4	1,3

Da durch die Gleichungen (4.6) und (4.9) der Zusammenhang zwischen dem Energieverlust und dem Weg des Teilchens gegeben ist, wird mit Hilfe der Energie, die zur Erzeugung eines Ionenpaares notwendig ist, auch der Zusammenhang von Energieverlust und Ionisation für Gase gegeben. Der Verlauf der Ionisation in Gasen ist somit durch die Beziehung zwischen Energieverlust und Energie, durch das Bremsvermögen, gegeben. Zur Veranschaulichung der Energieabhängigkeit des Bremsvermögens schreiben wir Gl. (4.6) in der Form

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \sim \frac{nZ^2}{v^2} f(v, \bar{J}).$$

Abbildung 21 zeigt den Verlauf des Bremsvermögens als Funktion der Energie in Einheiten mc^2. Der Kurventeil BC entspricht einer Abhängigkeit von $1/v^2$. Im Bereich relativistischer Energien ändert sich die Geschwindigkeit praktisch nicht mehr, und der Kurventeil CD entspricht $v \approx c$. Jedoch vergrößert sich bei relativistischen Energien der Faktor $v^2/(1 - \beta^2)$ unter dem Logarithmus in Gl. (4.6). Dies führt zu einem leichten Anstieg der Kurve CE.

Für sehr geringe Energien, Bereich AB, gilt unsere Gleichung nicht mehr. Hier werden die Teilchengeschwindigkeiten vergleichbar mit den Bahngeschwindigkeiten der Elektronen des Bremsmediums, und die Energieabgabe wird geringer. Bei kleinen Geschwindigkeiten kann das Teilchen auch selbst Elektronen einfangen, es treten Umladungserscheinungen auf, durch die die effektive Ladung des Teilchens geringer wird.

Mißt man die differentielle Ionisation von schweren Teilchen entlang ihrer Reichweite, so erhält man die als „Braggsche Kurve“ bekannte Funktion des Ionisationsvermögens. Die Zunahme der ionisierenden Wirkung gegen Ende der Reichweite ist nach den vorstehenden Ausführungen verständlich (Proportionalität mit $1/v^2$).

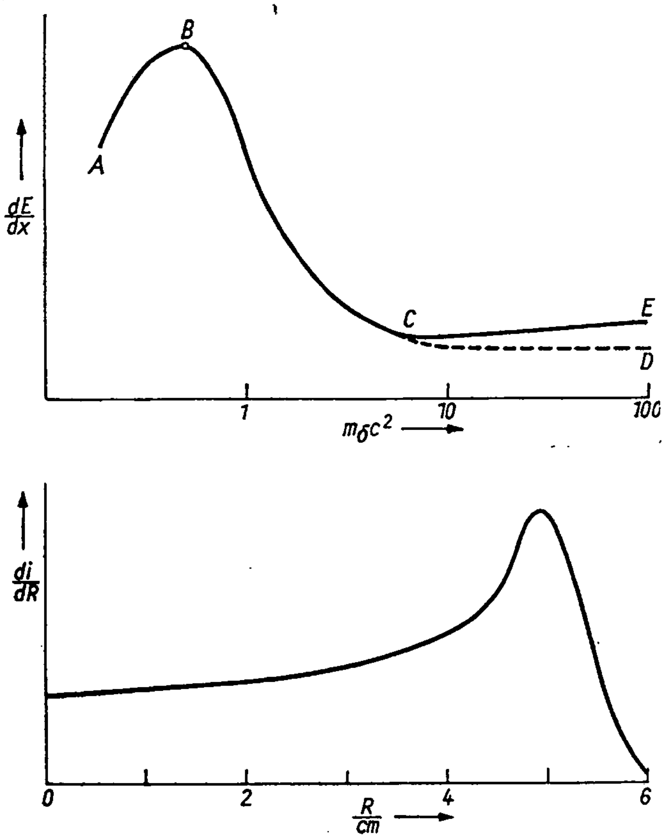


Abb. 21. dE/dx als Funktion der Energie (oben) und differentielle Ionisation schwerer Teilchen

4.2. Elektronen

4.2.1. Energieverluste

Für Elektronen sind die Voraussetzungen, die zur Ableitung der Gl. (4.6) führten, nicht erfüllt. Es war angenommen worden, daß das Teilchen praktisch keine Richtungsänderung erfährt. Das trifft für Elektronenstrahlen, die den

Hüllenelektronen der Atome massengleich sind, nicht zu. Bei diesem Prozeß erhält somit das einfallende Elektron einen Impuls senkrecht zu seiner Flugrichtung. Dieser Impuls ist von derselben Größenordnung wie der dem gestoßenen Elektron übertragene Impuls und darf daher keinesfalls vernachlässigt werden. Dementsprechend sind die Richtungsänderungen des Elektrons während seines Durchgangs durch Materie beträchtlich. Weiterhin ist zu berücksichtigen, daß stoßende und gestoßene Teilchen nicht unterscheidbar sind. Von H. Bethe wurde folgender Ausdruck für das Bremsvermögen gegenüber Elektronen gefunden:

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{2\pi e^4 n Z}{m_e v^2}\left[\ln\frac{m_e v^2 E}{2J(1-\beta^2)} - \ln 2\left(2\sqrt{1-\beta^2} - 1 + \beta^2\right) + 1 - \beta^2\right]. \tag{4.10}$$

J ist die mittlere Ionisierungsarbeit für die Atome der Bremssubstanz, E die relativistische kinetische Energie des Elektrons. Für J ergibt sich angenähert

$$J \approx 13{,}5\, Z \cdot 1{,}601 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{erg}.$$

Für Elektronen, die in Luft abgebremst werden, ergeben sich die Werte der Tabelle 9.

Tabelle 9. Bremsvermögen für Elektronen in Luft

Energie MeV	$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\xi}$ MeV cm²/g	Energie MeV	$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\xi}$ MeV cm²/g
0,01	19,5	100	2,47
0,1	3,65	1000	2,79
1	1,69	10000	3,48
10	1,95		

4.2.2. *Bremsstrahlung (Strahlungsbremsung)*

Ähnlich wie bei der Erzeugung von Röntgenstrahlen werden schnelle geladene Korpuskularstrahlen im Coulomb-Feld der Atome gebremst und emittieren eine Bremsstrahlung. Der Energieverlust bei der Bremsung ist proportional dem Quadrat der Beschleunigung. Da die Coulomb-Kräfte nur von der Ladung abhängig sind, besteht Gleichheit für Teilchen gleichgroßer Ladung. Da $\ddot{x}^2 \sim 1/M^2$ ist, wird demnach $(\mathrm{d}E/\mathrm{d}x)_{\mathrm{str}} \sim 1/M^2$. Die Bremsverluste werden daher für leichte Teilchen (Elektronen) besonders groß.

Bethe und Heitler haben durch Rechnung auf der Grundlage quantenmechanischer Betrachtungen für den Energieverlust von Elektronen durch Strahlung erhalten:

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\mathrm{str}} = nE\Phi(E)Z^2. \tag{4.11}$$

n ist die Anzahl der Elektronen pro Kubikzentimeter in der zu betrachtenden Substanz, Z die Kernladungszahl und $\Phi(E)$ eine lineare Funktion von $\ln E$. Für die Ionisationsbremsung von Elektronen hat Gl. (4.10) die Form

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\mathrm{Ion}} = nZ\,\Phi'(E),$$

wo $\Phi'(E)$ ebenfalls eine lineare Funktion von $\ln E$ ist. Man erhält durch Vergleich beider Energieverluste

$$\frac{\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\mathrm{str}}}{\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\mathrm{Ion}}} \approx \frac{EZ}{800},$$

wobei E in MeV gegeben ist. Für Blei, $Z = 82$, erhält man in beiden Fällen gleichgroße Energieverluste bei einer Energie der Elektronen von etwa 10 MeV. Die Energie, bei der Ionisations- und Strahlungsverlust den gleichen Betrag haben, wird kritische Energie genannt. Den Weg l, nach dessen Durchlaufen die Anfangsenergie auf den Wert E/e gesunken ist, nennt man Strahlungslänge

$$E = E_{\mathrm{kr}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{l}} \qquad (l(\mathrm{Al}) = 24\ \mathrm{cm};\ \ l(\mathrm{Pb}) = 6\ \mathrm{cm}).$$

4.3. γ-Strahlen

4.3.1. Photoeffekt

Besitzt ein Photon, das auf ein Atom trifft, genügend Energie, so kann es ein Elektron aus einem gebundenen Zustand herausheben und in einen beliebigen unbesetzten Zustand des Atoms überführen oder es vollständig aus dem Atomverband befreien. Die Elektronen sind im Atom in Schalen angeordnet, die sich durch ihre Bindungsenergien unterscheiden. Die innerste Schale ist die K-Schale mit 2 Elektronen im 1s-Zustand. Ihre Bindungsenergie ist $Rhc\,(Z-1)^2$, wo R die Rydberg-Konstante bedeutet; das Produkt der konstanten Faktoren Rhc beträgt 13,6 eV.

Wenn die Frequenz der auffallenden Photonen gering ist, können sie nur Elektronen anregen, die zu Bahnen der optischen Spektren gehören, also kleine Energien besitzen. Bei Erhöhung der Frequenz der einfallenden Strahlung können im Prozeß der Absorption Elektronen tieferliegender Bahnen angeregt werden. Es läßt sich leicht zeigen, daß der Photoeffekt nur bei gebundenen Elektronen auftreten kann, nicht aber bei freien Elektronen. Die Energie des γ-Quants wird in diesem Falle vollständig an das Elektron abgegeben, so daß für ein freies Elektron dessen Energie $E_\gamma = \frac{m_e}{2}\,v^2$ würde. Der Impulserhaltungssatz lautet: $E_\gamma/c = m_e v$, und hieraus würde $E_\gamma = m_e v c$ folgen, was mit der Energiebeziehung nicht vereinbar ist. Das Elektron muß an einen Partner, das Atom, ge-

bunden sein, der einen Teil des Impulses aufnehmen kann. Der Betrag des Impulses, den das Atom aufnimmt, ist jedoch so gering, daß er im allgemeinen gegenüber der Energie von γ-Quanten zu vernachlässigen ist. Die Energie der Photoelektronen ist daher $E_e = E_\gamma - E_B$, wobei E_B die Bindungsenergie des Elektrons im Atom bedeutet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Photoeffekt zustande kommt, ist

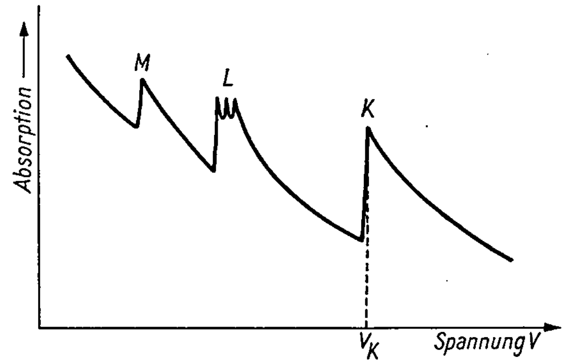


Abb. 22. Absorption von Photoelektronen

um so geringer, je größer die Energie des γ-Quants im Verhältnis zur Bindungsenergie des Elektrons ist. Abbildung 22 zeigt schematisch den Verlauf des Wirkungsquerschnitts für die Bildung von Photoelektronen als Funktion der Energie der auffallenden γ-Strahlen.

Die Bindungsenergien E_B der Elektronen in den Schalen sind gut bestimmbar und annähernd gegeben durch:

$$E_B(\mathrm{K}) \approx Rhc(Z-1)^2 \qquad \text{für die K-Schale,}$$

$$E_B(\mathrm{L}) \approx \frac{1}{4} Rhc(Z-5)^2 \qquad \text{für die L-Schale,}$$

$$E_B(\mathrm{M}) \approx \frac{1}{9} Rhc(Z-13)^2 \qquad \text{für die M-Schale.}$$

Verfolgt man die Querschnittswerte für die Bildung von Photoelektronen von großen nach kleinen Energien der γ-Strahlung, so sieht man aus Abb. 22, daß an der K-Grenze, wenn also E_γ mit E_B (K) übereinstimmt, ein stark ausgebildetes Maximum vorhanden ist, das jäh abfällt, wenn E_γ nicht mehr zur Ablösung eines K-Elektrons ausreicht. Bei Verringerung der E_γ-Werte wiederholen sich ähnliche Prozesse für die in drei Niveaus aufgespaltene L-Schale und ebenso für die M-Schale. Durch Messung der Energie der Elektronenstrahlen läßt sich, da E_B gut bekannt ist, die Energie von γ-Quanten ermitteln.

Der Wirkungsquerschnitt für die Photoabsorption kann mit Hilfe der Quantenelektrodynamik berechnet werden. Man erhält für K-Elektronen:

$$\frac{\sigma_K}{\mathrm{cm}^2} = 1{,}09 \cdot 10^{-16} Z^5 \left(\frac{R}{h\nu\,\mathrm{eV}}\right)^{7/2} \qquad \text{für kleine } h\nu\text{-Werte,}$$

$$\frac{\sigma_K}{\mathrm{cm}^2} = 1{,}34 \cdot 10^{-33} \frac{Z^5}{h\nu\,\mathrm{MeV}} \qquad \text{für } h\nu \gg m_e c^2.$$

4.3.2. *Compton-Streuung*

Wenn die Energie von γ-Strahlen die Bindungsenergie der Elektronen weit übersteigt, kann die Wechselwirkung von γ-Quant und Elektron einfach als Stoßprozeß zweier Teilchen beschrieben werden. Zu diesem seinerzeit höchst bedeutsamen Resultat gelangte H. A. COMPTON (1923) auf Grund von Versuchen über die Streuung von Röntgenstrahlen. Die bekannte Beziehung zwischen der Energie der einfallenden und der der gestreuten γ-Strahlung ist:

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2}(1 - \cos\Theta)} \quad \text{oder} \quad \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c^2}(1 - \cos\Theta). \tag{4.12}$$

Θ ist der Winkel zwischen der Einfalls- und der Streurichtung des γ-Quants, $h\nu$ und $h\nu'$ die γ-Energie vor bzw. nach der Streuung. λ und λ' sind die entsprechenden Größen für die Wellenlängen, $\lambda = \frac{c}{\nu}$ $\Lambda = \frac{h}{m_e c^2} = 2{,}426 \cdot 10^{-12}\,\text{m}$ ist die „Compton-Wellenlänge" des Elektrons.

Die Intensität der gestreuten γ-Strahlung ist auf Grund klassischer Rechnungen für den Bereich geringer Photonenenergie $h\nu \ll m_e c^2$ errechnet worden. Der Wirkungsquerschnitt für die „Thomson-Streuung" ergibt sich zu

$$\sigma_{\text{Th}} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6{,}6 \cdot 10^{-29}\ \text{m}^2/\text{Elektron}.$$

r_e ist der klassische Radius des Elektrons, $r_e = e^2/m_e c^2 = 2{,}8 \cdot 10^{-15}\,\text{m}$. Bei der Thomson-Streuung wird die Energie des Photons nicht geändert, es findet lediglich eine Richtungsänderung statt. Die Streuung ist proportional $(1 + \cos^2\varphi)$. Die Thomson-Streuung tritt auf, wenn die γ-Energie nicht zum Entfernen eines Elektrons aus seiner Bindung im Atom ausreicht. Der Wirkungsquerschnitt für Thomson-Streuung hängt nicht von der Wellenlänge des Photons ab.

Für die Compton-Streuung folgt, daß die Frequenz des gestreuten γ-Quants geringer als die des einfallenden ist. Der Wirkungsquerschnitt für Compton-Streuung ergibt sich aus Rechnungen von KLEIN/NISHINA und TAMM zu

$$\frac{\sigma_{\text{Compt}}}{\text{m}^2/\text{Elektron}} = 2\pi r_0^2 \left\{ \frac{1+\alpha}{\alpha^2} \left[\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \ln(1+2\alpha) \right] + \frac{1}{2\alpha} \ln(1+2\alpha) - \frac{1+3\alpha}{(1+2\alpha)^2} \right\} \tag{4.13}$$

mit $\alpha = h\nu/m_e c^2$. Für $\alpha \gg 1$ erhält man

$$\sigma_{\text{Compt}} \approx \pi r_e^2 \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} + \ln 2\alpha \right).$$

Der Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung nimmt für $E_\gamma \gg m_e c^2$ mit wachsendem E_γ ab. Da ein Atom Z Elektronen besitzt, wird demnach

$$\sigma_{\text{Compt}} \approx \frac{Z}{E_\gamma}.$$

4.3.3. *Paarbildung*

Als letzter Prozeß für die Wechselwirkung von γ-Quanten mit Materie ist die Bildung von Elektron-Positron-Paaren zu betrachten. Dieser Prozeß ist aus der Diracschen Theorie für das relativistische Elektron zu verstehen. Ein γ-Quant kann nicht spontan, unabhängig von Materie, in ein solches Elektron-Positron-Paar übergehen. Das läßt sich aus der Betrachtung von Energie- und Impulserhaltung ersehen. Der Energiesatz für eine Paarbildung würde ergeben:

$$E_\gamma = \frac{m_{e^-} c^2}{\sqrt{1 - \beta_{e^-}^2}} + \frac{m_{e^+} c^2}{\sqrt{1 - \beta_{e^+}^2}}.$$

Aus dem Impulssatz folgt

$$\boldsymbol{p}_\gamma = \boldsymbol{p}_{e^+} + \boldsymbol{p}_{e^-}.$$

Aus dem Energiesatz folgt für den Impuls

$$|\boldsymbol{p}_\gamma| = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{m_{e^-} c^2}{\sqrt{1 - \beta_{e^-}^2}} + \frac{m_{e^+} c^2}{\sqrt{1 - \beta_{e^+}^2}}.$$

Andererseits ist der relativistische Impuls gegeben durch

$$p = \frac{m \beta c}{1 - \beta^2},$$

und es folgt für die Summe der Impulse von Elektron und Positron:

$$|\boldsymbol{p}_\gamma| = |\boldsymbol{p}_{e^-}| + |\boldsymbol{p}_{e^+}| = \frac{m_{e^-} \beta c}{\sqrt{1 - \beta_{e^-}^2}} + \frac{m_{e^+} \beta c}{\sqrt{1 - \beta_{e^+}^2}}.$$

Das ist ein Wert, der kleiner ist, als er aus der Energiegleichung folgt. Zur Erfüllung des Impulssatzes ist daher die Teilnahme eines weiteren Teilchens – eines Kerns oder eines Elektrons – erforderlich. Die notwendige Energie zur Paarerzeugung ist, wenn man von dem geringen Energiebetrag, den der schwere Atomkern aufnimmt, absieht:

$$E_{\min} \approx 2 m_e c^2 = 1{,}22 \text{ MeV}.$$

Zur Paarerzeugung im Coulomb-Feld eines Elektrons erhöht sich die Minimalenergie auf $E_{\min} = 4 m_e c^2$.

Der Wirkungsquerschnitt für die Paarerzeugung hat eine sehr komplizierte Form. Für hohe Energien, $h\nu \gg m_e c^2$, ist der Querschnitt nicht mehr von der Energie der γ-Quanten abhängig. Im Bereich mittlerer Energien, etwa bei $5 \cdots 10\ m_e c^2$, ist $\sigma_{\text{Paar}} \approx Z^2 \ln E_\gamma$. Diese Betrachtungen gelten für die Paarbildung im Coulomb-Feld des Atomkerns. Die Paarbildung in der Nähe eines Elektrons ist bei Energien von einigen MeV ein äußerst seltener Prozeß. Er spielt daher für die γ-Quellen, z. B. radioaktive Isotope, keine Rolle. Für γ-Energien oberhalb von 10 MeV kann der Querschnitt für die Paarbildung an Elektronen

etwa 10% für leichte und etwa 1% für schwere Elemente im Verhältnis zu dem der Paarbildung am Atomkern betragen.

Abbildung 23 veranschaulicht schematisch den Anteil der verschiedenen Absorptionsprozesse für γ-Strahlen als Funktion der Energie.

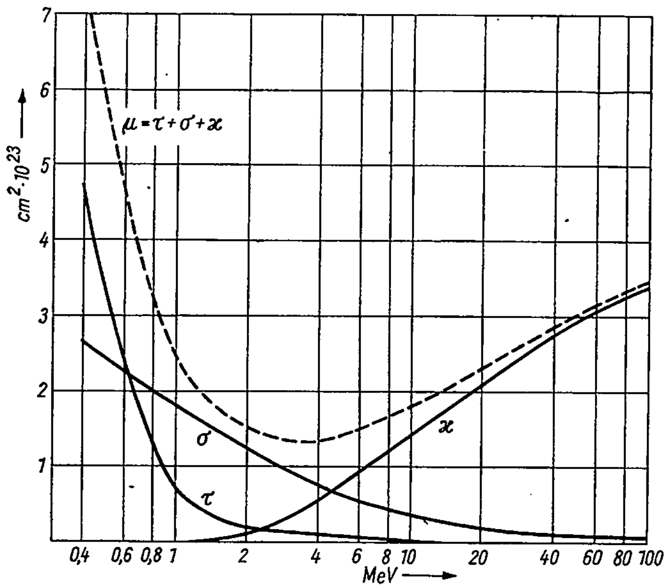


Abb. 23. Wirkungsquerschnitte des Bleiatoms gegenüber γ-Strahlen τ — Photoeffekt, σ — Compton-Effekt, $\varkappa$ — Paarbildung; $\mu = \tau + \sigma + \varkappa$

5. KINEMATIK DER STOSSPROZESSE ZWISCHEN TEILCHEN

5.1. Stoß zweier Teilchen

Es sei der Zusammenstoß zweier freier Teilchen betrachtet. Das Teilchen mit der Masse M_2 befinde sich vor dem Zusammenstoß mit dem Teilchen der Masse M_1, der Geschwindigkeit V_1 und der kinetischen Energie E_1 in Ruhe. Nach dem Zusammenstoß bewegen sich die Teilchen mit den Massen M_3, M_4, den Geschwindig-

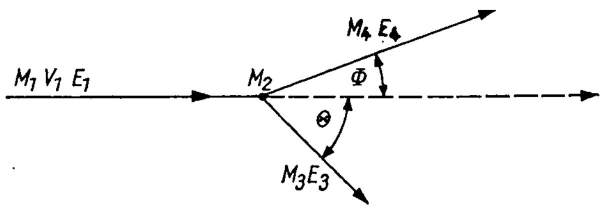


Abb. 24a. Stoßdiagramm für zwei Teilchen

keiten V_3, V_4 und den Energien E_3 und E_4 unter den Winkeln Θ bzw. Φ zur Anfangsrichtung des Teilchens 1 weiter. Aus Impuls- und Energiesatz folgen die Beziehungen (Abb. 24a)

$$\begin{aligned}
M_1 V_1 &= M_3 V_3 \cos\Theta + M_4 V_4 \cos\Phi, \\
0 &= M_3 V_3 \sin\Theta - M_4 V_4 \sin\Phi, \\
E_1 &= E_3 + E_4 - Q, \\
M_1 + M_2 &= M_3 + M_4.
\end{aligned}$$

Q bedeutet die „Energietönung" des Prozesses; sie hat für exotherme Prozesse positives, für endotherme Prozesse negatives Vorzeichen. Im allgemeinen sind M_1, V_1, E_1 und M_2 gegeben. Man erhält für die Energien der Teilchen nach dem Stoß

$$\begin{aligned}
E_4 = {}& \frac{1}{(M_3+M_4)^2}\left[E_1 M_1 M_4 \cos 2\Phi + E_1 M_2 M_3 + Q M_3 (M_3 + M_4)\right] \\
& \pm \frac{2 E_1 \cos\Phi}{(M_3+M_4)^2}\left[M_1 M_4 \left\{M_2 M_3 - M_1 M_4 \sin^2\Phi \right.\right. \\
& \left.\left. + \frac{Q}{E_1} M_3 (M_3 + M_4)\right\}\right]^{1/2}, \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

$$E_3 = \frac{1}{(M_3 + M_4)^2} \left[E_1 M_1 M_3 \cos 2\Theta + E_1 M_2 M_4 + Q M_4 (M_3 + M_4)\right]$$
$$\pm \frac{2 E_1 \cos \Theta}{(M_3 + M_4)^2} \left[M_1 M_3 \left\{ M_2 M_4 - M_1 M_3 \sin^2 \Theta \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{Q}{E_1} M_4 (M_3 + M_4) \right\}\right]^{1/2}. \tag{5.2}$$

Elastische Streuung

Für elastische Streuung wird $Q = 0$, $M_1 = M_4$ und $M_2 = M_3$. Man erhält dann

$$E_4 = \frac{E_1}{(M_1 + M_2)^2} \left[M_2^2 - M_1^2 + 2 M_2^2 \cos^2 \Phi \right.$$
$$\left. \pm 2 M_1 \cos \Phi \sqrt{M_2^2 - M_1^2 \sin^2 \Phi}\right], \tag{5.3}$$

$$E_3 = \frac{E_1}{(M_1 + M_2)^2} 4 M_1 M_2 \cos^2 \Theta. \tag{5.4}$$

Weiterhin ergibt sich für die Beziehung der Winkel Θ und Φ zueinander

$$\sin^2 \Phi = \frac{4 M_2^2 \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta}{(M_1 + M_2)^2 - 4 M_1 M_2 \cos^2 \Theta}; \quad \tan \Phi = \frac{M_2 \sin 2\Theta}{M_1 - M_2 \cos 2\Theta}, \tag{5.5}$$

$$\sin^2 \Theta = \frac{M_2 - M_1 \sin^2 \Phi}{2 M_2} \pm \frac{\cos \Phi}{2 M_2} \sqrt{M_2^2 - M_1^2 \sin^2 \Phi}. \tag{5.6}$$

Das gestreute Teilchen ($M_1 = M_4$) hat die Energie E_4, das gestoßene Teilchen ($M_2 = M_3$) die Energie E_3.

Zur Veranschaulichung der Gl. (5.3) schreibt man sie in der Form

$$V_4^2 - 2 V_4 V_1 \frac{M_1 \cos \Phi}{(M_1 + M_2)} = V_1^2 \frac{M_1 (M_3 - M_1)}{(M_1 + M_2)} + 2Q \frac{M_3}{M_4 (M_1 + M_2)}. \tag{5.7}$$

(Vgl. Abb. 24b.)

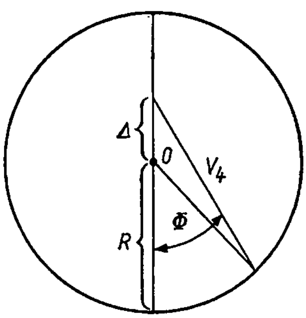


Abb. 24b. Zur Berechnung des Stoßes zwischen zwei Teilchen

Man erkennt, daß die Endpunkte von V_4 auf einem Kreis liegen, der mit dem Radius R einen um den Betrag Δ vom Nullpunkt des Koordinatensystems entfernten Mittelpunkt besitzt. Man erhält

$$\Delta = \frac{M_1 V_1}{(M_1 + M_2)} \tag{5.8}$$

und

$$R^2 = \frac{M_1 V_1^2}{M_4(M_1 + M_2)^2} \left[M_2 M_3 + 2Q \frac{M_3}{M_1 V_1^2} (M_1 + M_2) \right]. \tag{5.9}$$

Für Reaktionen leichter einfallender Teilchen mit schweren Atomkernen, $M_2 \gg M_1$, wird $\Delta \approx 0$ und damit V_4 praktisch unabhängig von der Austrittsrichtung des Teilchens. Bei elastischer Streuung $(Q = 0)$ wird $M_1 = M_4$ und $M_2 = M_3$, so daß die Energie des gestreuten Teilchens annähernd gleich der des einfallenden Teilchens, unabhängig vom Streuwinkel Φ, wird.

$\Delta = R$ führt, wie man aus den Gleichungen (5.7), (5.8) und (5.9) ableitet, zu

$$V_4 = 2\Delta \cos \Phi = \frac{2 M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cos \Phi. \tag{5.10}$$

Weiterhin erhält man aus den Gleichungen (5.10) und (5.7)

$$E_1(M_1 - M_3) = Q M_3.$$

Für $Q = 0$, elastischer Stoß, wird $M_1 = M_3$ und damit $M_2 = M_4$, also $M_1 = M_2$, d. h., es handelt sich um den Stoß massengleicher Partner. Aus den vorstehenden Gleichungen und Abb. 24b entnimmt man, daß die Streuung nur unter Winkeln $< \pi/2$ erfolgt. Wird $Q < 0$, so ergibt sich, da im allgemeinen $M_1 < M_3$ ist, daß ebenfalls nur Vorwärtsbewegung der leichteren Reaktionspartner eintreten kann, wenn bei gegebenem negativem Q-Wert die Energie E_1 des einfallenden Teilchens den Wert

$$E_1 = Q \frac{M_3}{M_3 - M_1},$$

unterschreitet.

Schließlich ist der Fall $\Delta > R$ zu betrachten. Man erhält

$$V_4 = \Delta \cos \Phi \pm \sqrt{R^2 - \Delta^2 \sin^2 \Phi}$$

und erkennt, daß $\Phi_{\max} = \text{arc sin}\,(R/\Delta)$, also nur Vorwärtsemission des Teilchens M_4 möglich ist. Weiterhin sieht man, daß für $\sin \Phi < R/\Delta$ unter einem Winkel Φ zwei energetisch verschiedene Gruppen von Teilchen auftreten.

Aus den Gleichungen (5.8) und (5.9) für Δ und R^2 erhält man

$$Q < E_1 \frac{M_4 - M_2}{M_3}.$$

Da M_4 bei fast allen in der Praxis untersuchten Prozessen kleiner als M_2 ist, erkennt man, daß der Wert für Q negativ sein muß, also eine endotherme Reaktion vorliegt.

Bei elastischer Streuung, $Q = 0$ und $M_1 = M_4$, $M_2 = M_3$, sieht man, daß $M_1 > M_3$ wird, z. B. Streuung von α-Teilchen an Protonen oder Deuteronen an Protonen.

Die vorstehend diskutierten Fälle seien an einigen häufig verwendeten Reaktionen erläutert.

1. Streuung von massengleichen Partnern, Proton an Proton und Neutron an Proton

Für diese Fälle wird $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 1$ und $Q = 0$. Aus den Gleichungen (5.8) und (5.9) folgt $\Delta = V_1/2$ und $R = V_1/2$. Aus den Beziehungen (5.3) und (5.4) erhält man $E_3 = E_1 \cos^2 \Theta$ und $E_4 = E_1 \cos^2 \Phi$. Da $E_3 + E_4 = E_1$ ist, folgt, daß $\cos^2 \Theta + \cos^2 \Phi = 1$ wird und demnach

$$\sin \Phi = \cos \Theta .$$

In dem hier behandelten nichtrelativistischen Fall ist der Winkel zwischen gestoßenem und gestreutem Teilchen $\pi/2$.

2. Streuung von α-Teilchen an Protonen

$$M_1 = M_4 = 4, \quad M_2 = M_3 = 1; \quad Q = 0.$$

Aus den Gleichungen (5.8) und (5.9) folgt $\Delta = \frac{4}{5} V_1$ und $R = \frac{1}{5} V_1$.

$$V_4 = \frac{1}{5} V_1 \left[4 \cos \Phi \pm \sqrt{16 \cos^2 \Phi - 15}\right];$$

$$V_4 = \frac{1}{5} V_1 \left[4 \cos \Phi \pm \sqrt{1 - 16 \sin^2 \Phi}\right]. \tag{5.11}$$

Aus dem Radikanden in der Beziehung für V_4 ist ersichtlich, daß der maximale Ablenkungswinkel $\Phi_{\max}$ wegen $\sin \Phi_{\max} = 1/4$ etwa 14,5° werden kann. Die maximale Energieübertragung ergibt sich aus Gl. (5.11) für $\Theta = 0°$ zu $E_3 = E_1 \cdot 16/25$. Für den größten Ablenkwinkel des α-Teilchens, $\sin \Phi_{\max} = 1/4$, erhält man $E_3 = E_1/25$. Es ist ersichtlich, daß die Energieübertragung von α-Teilchen an Protonen beim zentralen Stoß erhebliche Beträge annimmt.

In ähnlicher Weise ist die Berechnung der Streuung von Protonen an Elektronen durchzuführen. Man erhält als maximalen Ablenkungswinkel für einen Zusammenstoß etwa 1,86′. Beim zentralen Zusammenstoß beträgt die Energieübertragung etwa $E_1 \cdot 2 \cdot 10^{-3}$.

3. (d—d)-*Reaktion*

Die Reaktionsgleichung dieses Prozesses lautet: ${}^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \to {}^3_2\mathrm{He} + \mathrm{n}$. Es ist $M_1 = M_2$; $M_3 = 3$; $M_4 = 1$; $Q = 3{,}27$ MeV.

$$\Delta = \frac{1}{2} V_1; \quad R^2 = \frac{1}{4} V_1^2 \left[3 + 6 \frac{Q}{V_1^2}\right].$$

$$E_4 = \frac{E_1}{8} \left[\left(\cos 2\Phi + 3 + 6 \frac{Q}{E_1}\right) + 2 \cos \Phi \left(3 - \sin^2 \Phi + \frac{Q}{E_1} \cdot 6\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Der exotherme Charakter der Reaktion weist darauf hin, daß sie bereits bei sehr geringen Energien der auffallenden Teilchen Neutronen liefern sollte. In der Tat ist, freilich mit außerordentlich kleinen Ausbeuten an Neutronen, diese Reaktion bereits unterhalb einer Energie von etwa 10 keV der beschleunigten Deuteronen beobachtet worden. Zur Bestimmung von Q eignet sich besonders gut die Beobachtung der unter 90° zur Richtung des primären Deuteronenstrahls emittierten Neutronen. Für $\cos\Phi = 0$ wird aus Gl. (5.3)

$$E_4 = \frac{E_1}{4}\left(1 + 3\,\frac{Q}{E_1}\right),$$

also eine recht einfache Beziehung zwischen E_4, E_1 und Q.

4. ${}^7_3\text{Li} + \text{p} \rightarrow {}^7_4\text{Be} + \text{n}$.

$$M_1 = 1;\; M_2 = 7;\; M_3 = 7;\; M_4 = 1;\; Q = -1{,}65\,\text{MeV}.$$

Man findet für diese Reaktion aus den Gleichungen (5.8) und (5.9)

$$\Delta = \frac{1}{8}\,V_1 \quad \text{und} \quad R^2 = \frac{7}{64}\,V_1^2\left[7 + \frac{Q}{E_1}\cdot 8\right].$$

Da Q negativ ist, wird die Reaktion erst für $E_1 \geqq \frac{8}{7}\,Q \approx 1{,}89\,\text{MeV}$ möglich. An der „Schwelle" für die Reaktion erhält man

$$E_4 = \frac{1}{64}\,E\cos 2\Phi = 29{,}5\,\cos 2\Phi\,\text{keV}.$$

Aus Gl. (5.7) ergibt sich, daß $V_4 = \Delta\cos\Phi \pm \sqrt{R^2 - \Delta^2\sin^2\Phi}$ ist. Es folgt demnach, daß für $R^2 = 0$ auch $\Phi = 0$ sein muß, also nur Emission nach vorwärts mit $E_4 = \frac{1}{64}\,E_1$ möglich ist.

Beziehungen im Schwerpunktsystem

Energie- und Impulssatz liefern, wenn wir analoge Bezeichnungen wie in den Gleichungen (5.1) und (5.2) verwenden, nun aber die entsprechenden Größen im Schwerpunktsystem (S-System) durch den Index S kennzeichnen (vgl. Abb. 25):

$$\begin{aligned} &E_1^S + E_2^S + Q = E_3^S + E_4^S;\\ &M_1 V_1^S = M_2 V_2^S; \qquad M_3 V_3^S = M_4 V_4^S;\\ &V_1 = V_1^S + V_2^S, \end{aligned} \tag{5.12}$$

wobei V_2^S gleich der Geschwindigkeit V_2 des Schwerpunktes des S-Systems im Laboratoriumssystem ist.

Aus diesen Beziehungen folgt

$$V_1^S = V_1 \frac{M_2}{M_1 + M_2}; \quad V_2^S = V_1 \frac{M_1}{M_1 + M_2}; \quad \frac{V_1^S}{V_2^S} = \frac{M_2}{M_1};$$

$$E_1^S = E_1 \frac{M_2^2}{(M_1 + M_2)^2}; \quad E_2^S = E_1 \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2}; \quad \frac{E_1^S}{E_2^S} = \frac{M_2}{M_1}; \tag{5.13}$$

$$E_3^S = \left(\frac{E_1 M_2}{M_1 + M_2} + Q\right) \frac{M_4}{M_1 + M_2}; \quad E_4^S = \left(\frac{E_1 M_2}{M_1 + M_2} + Q\right) \frac{M_3}{M_1 + M_2};$$

$$\frac{E_3^S}{E_4^S} = \frac{M_4}{M_3}.$$

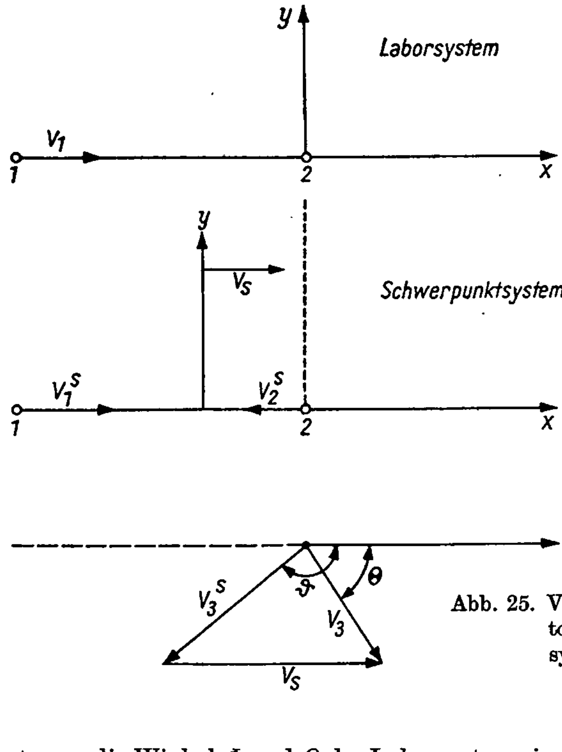


Abb. 25. Vergleich zwischen Laboratoriums- und Schwerpunktsystem

Bezeichnet man die Winkel Φ und Θ des Laborsystems im S-System mit φ und ϑ, so ergeben sich (Abb. 25) folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} (V_3^S)^2 &= V_3^2 + V_S^2 - 2\,V_3 V_S \cos\Theta; \\ V_3^2 &= (V_3^S)^2 + V_S^2 + 2\,V_3^S V_S \cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

Hieraus folgt

$$V_3^2 = 2\,V_1^2 \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2}\right)^2 (1 + \cos\vartheta).$$

Aus Gl. (5.4) erhält man

$$V_3 = 2\,V_1 \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cos\Theta.$$

Demnach wird $\cos^2\Theta = \frac{1}{2}(1 + \cos\vartheta) = \cos^2\frac{\vartheta}{2}$, also

$$\Theta = \frac{\vartheta}{2}.$$

Analog ergibt sich für die Beziehung zwischen Φ und φ aus den Gleichungen (5.14)

$$\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^2 = \frac{1}{(M_1 + M_2)^2}(M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2\cos\varphi).$$

Mit Gl. (5.5) folgt

$$\cos\Phi = \frac{M_1 + M_2\cos\varphi}{(M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2\cos\varphi)^{1/2}};$$

$$\tan\Phi = \frac{M_2\sin\varphi}{M_1 + M_2\cos\varphi}. \tag{5.15}$$

Als Gl. (5.15) folgt weiterhin

$$\sin(\varphi - \Phi) = \frac{M_1}{M_2}\sin\varphi.$$

Für $M_2 \gg M_1$ erhält man näherungsweise

$$\varphi = \Phi + \frac{M_1}{M_2}\sin\varphi.$$

Da $\vartheta + \varphi = \pi$ ist, folgt

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \cos\Theta = \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Die Beziehungen im S-System zeichnen sich durch ihre Einfachheit aus und werden für die Kinematik der Kernprozesse in großem Umfang verwendet. Insbesondere sind sie von Bedeutung für die Ermittlung der Streuwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Streuwinkel. Hierauf wird in dem Kapitel über Neutronenphysik hingewiesen werden. Die vorstehend betrachteten quantitativen Beziehungen zwischen Energie und Emissionsrichtung zweier miteinander reagierender Stoßpartner erfolgten lediglich auf der Grundlage der Erhaltungssätze für die Gesamtenergie und den Gesamtimpuls. Über die Wahrscheinlichkeit der Richtungsvertei-

lung der beiden Partner nach dem Zusammenstoß bzw. nach der Reaktion sagen die bisherigen Betrachtungen nichts aus. Hierzu ist die Kenntnis des Kraftgesetzes zwischen den reagierenden Teilchen notwendig, und umgekehrt läßt sich aus der Richtungsverteilung der Reaktionspartner das zwischen ihnen wirkende Kraftgesetz ermitteln. Dies ist allerdings in der Kernphysik eine schwierige Aufgabe, die sich nur näherungsweise durch den Vergleich theoretischer Modellvorstellungen lösen läßt.

5.2. Rutherford-Streuung (Einzelstreuung)

Die Stoß-Wechselwirkung zwischen Teilchen kann man mit Hilfe einfacher Gesetze der Newtonschen Mechanik erfassen. Eine exakte Lösung dieses Problems gelingt jedoch nur für recht einfache, zentrale Kräfte. Die Wechselwirkung zwischen zwei Partnern läßt sich auf die Wechselwirkung eines Teilchens, dem die reduzierte Masse $M_1 M_2/(M_1 + M_2)$ zuzuteilen ist, mit einem zentralen Kraftfeld zurückführen. In den Lehrbüchern über theoretische Mechanik, z. B. LANDAU-LIFSCHITZ, Theoretische Physik, Bd. 1, sind die Wechselwirkungen und Bahnen der Teilchen unter den genannten Bedingungen für Kraftfelder, die, wie die Schwerkraft in der Himmelsmechanik, mit $1/r^2$ abnehmen, eingehend behandelt.

RUTHERFORD untersuchte mit seinen Mitarbeitern die Streuung von α-Teilchen (die damals noch als die energiereichsten Teilchen galten) an Atomen unter dem Einfluß elektrischer Kräfte, also von Kräften, die sich ebenfalls mit $1/r^2$ ändern. Die Rutherford-Streuung folgt ähnlichen Gesetzen wie die Himmelsmechanik. Aus den Ergebnissen der Versuche RUTHERFORDS und denen älterer Physiker, insbesondere P. LENARDS, folgte, daß das Atom aus einer Hülle von Elektronen besteht, während seine Masse auf einen sehr geringen Raum innerhalb der Elektronenhülle, den Kern, konzentriert ist, der eine positive Ladung vom gleichen Betrag wie die Ladung der Elektronenhülle besitzt, so daß das Atom als Ganzes elektrisch neutral ist.

Die genannten Versuche RUTHERFORDS hatten das Ziel, die Ausdehnung des Kerns, seine Ladung und die Gültigkeit des Coulomb-Gesetzes zwischen den α-Teilchen und dem Kern zu untersuchen. Die der Rutherford-Streuung zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten sind, wie oben erwähnt, denen der Himmelsmechanik so ähnlich, daß es genügt, ihre Hauptzüge hervorzuheben.

Das gestreute Teilchen bewege sich, wie aus Abb. 26 ersichtlich, längs seiner Bahn s an dem am Orte 0 befindlichen Kraftzentrum vorbei. Wenn m und v Masse und Geschwindigkeit des Teilchens bedeuten, so gilt bei großen Abständen r für den Drehimpuls

$$mvr \sin \alpha = mvb = D.$$

Die Gesamtenergie ist für große Entfernungen des Teilchens vom Streuzentrum durch die kinetische Energie des Teilchens gegeben:

$$T = mv^2/2.$$

Während der Wechselwirkung des Teilchens mit dem Kraftzentrum ist die Gesamtenergie gegeben durch

$$E = \frac{m}{2} v^2 + U(r); \quad U(r) = \text{potentielle Energie.}$$

Da die Streuung in einer Ebene stattfindet, ergibt sich unter Verwendung der Polarkoordinaten r und γ

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\gamma}^2).$$

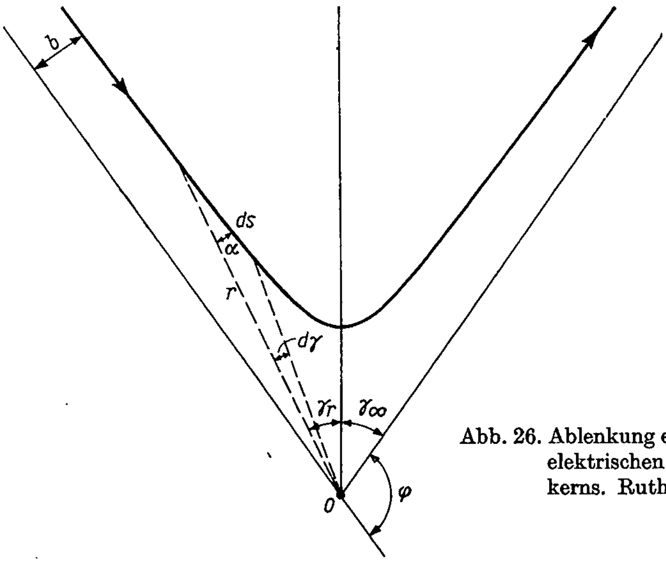


Abb. 26. Ablenkung eines Teilchens im elektrischen Feld des Atomkerns. Rutherford-Streuung

Der Drehimpuls wird $D = mr^2\dot{\gamma}$, und es folgt

$$dt = \frac{mr^2}{D} d\gamma. \tag{5.16}$$

Die Gesamtenergie ergibt sich zu

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m}{2} r^2\dot{\gamma}^2 + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{D^2}{2mr^2} + U(r).$$

Hieraus folgt

$$dr^2 = \frac{2}{m}\left[E - \frac{D^2}{2mr^2} - U(r)\right] dt^2. \tag{5.16a}$$

Ersetzt man mit Hilfe von Gl. (5.16) $\mathrm{d}t$ durch $\mathrm{d}\gamma$, so erhält man

$$\gamma = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{D}{mr^2} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{D^2}{2mr^2} - U(r)\right)}}. \tag{5.17}$$

Wie aus Abb. 26 ersichtlich, wird das Minimum von r, nämlich r_0, bei $\gamma = 0$ erreicht. Das „Perihel" läßt sich leicht finden, da an dieser Stelle die radiale Komponente der Geschwindigkeit ihr Vorzeichen ändert: Es ist $\mathrm{d}r = 0$, also r ein Minimum. Man erhält dann mit Gl. (5.16a)

$$E_{\text{per}} = \frac{D^2}{2mr_0^2} + U(r_0). \tag{5.18}$$

Mit einem Potential der Form $U = a/r$ ergibt sich unter Verwendung der Abkürzung $D/mr = x$ für das Integral (5.17):

$$\gamma = -\int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2E}{m} - x^2 - \frac{2a}{D}x}} = \left[\arccos \frac{x + \frac{a}{D}}{\sqrt{\frac{a^2}{p^2} + \frac{2E}{m}}}\right]_{x = \frac{D}{mr_0}}^{x = \frac{D}{mr}}.$$

Bei der Streuung von Nukleonen an Atomkernen interessiert die Ablenkung des gestreuten Teilchens unter dem Winkel γ_∞, d. h. für große Abstände vom Streuer ($r \approx \infty$). In diesem Falle ist die Gesamtenergie E durch die kinetische Energie $mv^2/2$ des gestreuten Teilchens bestimmt. Aus der Beziehung für die Energie im Perihel ergibt sich mit $E = mv^2/2$ und $D = mvb$

$$r_0 = \frac{a}{mv^2} \pm \frac{1}{mv^2}\sqrt{a^2 + m^2v^4b^2}. \tag{5.19}$$

Setzt man diesen Wert für r_0 in die untere Grenze des Integrals ein, so erhält man an der unteren Grenze $\gamma(r_0) = \arccos 1 = 0$. Dieses Ergebnis ist auch direkt aus Abb. 26 ersichtlich. An der oberen Grenze Gl. (5.17) wird $r = \infty$, so daß man schließlich erhält:

$$\gamma_\infty = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2D^2E}{ma^2}}}; \quad \cos\gamma_\infty = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2D^2E}{ma^2}}}; \tag{5.20}$$

$$b = \frac{a}{mv^2}\tan\gamma_\infty.$$

Zwischen dem gesamten Ablenkungswinkel und γ_∞ besteht folgende Beziehung (Abb. 26):

$$\varphi = \pi - 2\gamma_\infty; \quad \frac{1}{2}\varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma_\infty.$$

Demnach erhält man für b:

$$b = \frac{a}{mv^2} \cot \frac{\varphi}{2} .$$

Für das Potential erhält man im Falle von Coulomb-Kräften $a = zZe^2$ und damit

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{zZe^2}{mv^2 b}. \tag{5.21}$$

Dies ist die von RUTHERFORD abgeleitete Beziehung für die Streuung von α-Teilchen ($z = 2$) an Atomkernen. Oftmals wird diese Formel in etwas anderer Weise geschrieben. Es wird der Abstand ϱ des Teilchens vom Streuzentrum eingeführt, der bei gegebener Teilchenenergie die geringste Entfernung vom Streuer bedeutet, also den Minimalabstand bei zentralem Stoß. In diesem Falle wird der Stoßparameter $b = 0$, und man erhält für $r_0 = \varrho$ mit Gl. (5.19)

$$\varrho = \frac{2zZe^2}{mv^2}. \tag{5.22}$$

Damit folgt für beliebige b

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\varrho}{2b}. \tag{5.22a}$$

Die Zahl der unter dem Winkel φ gestreuten Teilchen läßt sich leicht berechnen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mit einem Stoßparameter zwischen b und $b + \mathrm{d}b$ ein Teilchen am Streuer vorbeifliegt, ist proportional $2\pi b\, \mathrm{d}b$. Ist n die Zahl der Streuzentren pro Kubikzentimeter und N die Zahl der zu streuenden (α-)Teilchen, die senkrecht auf einen Quadratzentimeter der Streusubstanz treffen, so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}N}{Nn} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2\pi b\, \mathrm{d}b}{2\pi \sin\varphi\, \mathrm{d}\varphi} = \frac{b}{\sin\varphi} \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\varphi},$$

wobei $\mathrm{d}\Omega$ den Raumwinkel bedeutet, in den das Teilchen gestreut wird. $\mathrm{d}\sigma$ nennt man den differentiellen Streuquerschnitt. Mit den Gleichungen (5.22) und (5.22a) erhält man

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{zZe^2}{mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\varphi}{2}}. \tag{5.23}$$

Für andere Potentialfunktionen $U(r)$ ergeben sich völlig andersartige Richtungsverteilungen der gestreuten Teilchen, wie aus den Ansätzen (z. B. Gl. (5.17)) ersichtlich ist. Man erkennt aus den vorstehenden Betrachtungen, daß durch Messung der Winkelabhängigkeit bei der elastischen Streuung Rückschlüsse auf das Kraftgesetz zwischen den Streupartnern möglich werden.

Bei der Herleitung der Streuformel von RUTHERFORD war das Streuzentrum als im Nullpunkt des Koordinatensystems ruhend vorausgesetzt worden, d. h., daß

die Streuung an einem Teilchen stattfindet, dessen Masse M groß ist gegenüber der des zu streuenden Teilchens, bzw. das Teilchen wird in einem ruhenden Zentralfeld abgelenkt. Ist die Masse M des Streuers nicht groß im Vergleich zu der des Streuteilchens (m), so gilt eine analoge Beziehung im Schwerpunktsystem, wenn man an Stelle von m die abgeleitete Masse $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ einsetzt und den Streuwinkel φ als im Schwerpunktsystem gemessen betrachtet. Die Geschwindigkeit v ist dann die Relativgeschwindigkeit beider Stoßpartner, also gleich der Geschwindigkeit des zu streuenden Teilchens im Laborsystem. Zum Übergang vom S-System in das L-System ist φ entsprechend der Gl. (5.15) durch Φ zu ersetzen. Man erkennt, daß die Beziehung für das L-System kompliziert wird. Es sei daher nur der einfache Fall für die Streuung massengleicher Partner unter dem Einfluß von Coulomb-Kräften, die Streuung eines Protons an einem Proton, betrachtet. Für diesen Fall folgt aus Gl. (5.15) $\sin\varphi/2 = \sin\Phi$, und man erhält

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{e^4}{2m^2v^4}\,\frac{\pi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\sin^4\varphi/2} = \frac{e^4}{m^2v^4}\,\frac{2\pi\sin\Phi\cos\Phi\,\mathrm{d}\Phi}{\sin^4\Phi}. \tag{5.24}$$

Weiterhin ist zu berücksichtigen, daß bei identischen Teilchen keine Unterscheidung zwischen gestreuten und gestoßenen Teilchen möglich ist. Unter dem Winkel Φ beobachtet man demnach die Summe der beiden genannten Teilchen. Man erhält mit $\mu = m/2$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^4}{E_1{}^2}\left(\frac{1}{\sin^4\Phi} + \frac{1}{\cos^4\Phi}\right)\cos\Phi. \tag{5.25}$$

Diese auf klassischen Vorstellungen beruhende Beziehung ist ungenau. Die von H. Mott durchgeführte quantenmechanische Rechnung ergibt noch ein zusätzliches Glied, das die Interferenz zweier Wellenfunktionen identischer Teilchen berücksichtigt. Die Gleichung nach Mott hat folgende Form:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{Z^2e^4}{E_1{}^2}\left(\frac{1}{\sin^4\Phi} + \frac{1}{\cos^4\Phi} - \frac{1}{\sin^2\Phi\cos^2\Phi}\right)\cos\Phi. \tag{5.26}$$

Bei Teilchen mit dem Spin 1/2 ist das Vorzeichen des Zusatzgliedes negativ (z. B. bei zwei Protonen), bei spinlosen Teilchen (α-Teilchen) ist das Vorzeichen positiv. Für nicht identische Teilchen führt die quantenmechanische Rechnung zu demselben Ergebnis wie die Formel von Rutherford.

Streuversuche mit α-Teilchen wurden in den Jahren von 1910 bis 1924 im Laboratorium von Rutherford für eine große Anzahl verschiedener Atomkerne durchgeführt. Die Rutherford-Formel Gl. (5.23) ermöglicht wichtige Feststellungen über die Größe der Atomkerne (ϱ in Gl. (5.22)) und der Kernladung sowie — aus den bei hohen Energien und leichten Kernen (geringere Coulomb-Kräfte als bei schweren Kernen) gefundenen Abweichungen von der errechneten Streuung — über die Gültigkeitsgrenzen reiner Coulomb-Kräfte bzw. den Beginn des Überwiegens von Kernkräften über die elektrischen Kräfte. Aus einer Reihe von Experimenten, die J. Chadwick durchführte, ergab sich die Identität von Kernladung und Ordnungszahl des betreffenden Elements im periodischen System.

Außerdem zeigten diese Versuche, daß für die Kernkräfte die rasche Abnahme mit wachsender Entfernung kennzeichnend ist. Man nimmt für die Kernkräfte Potentiale der Form $U(r) \approx \frac{1}{r} e^{-kr}$ an. Die Kernradien, so wurde gefunden, folgen mit guter Näherung der Beziehung $R = r_0 A^{1/3}$, wo $r_0 = 1{,}3$ bis $1{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm ist.

Anmerkung:
Die für schwere, geladene Teilchen abgeleiteten Beziehungen für die Ionisationsbremsung — Energieabgabe an Atomelektronen, Kap. 4.1. — sind aus den vorstehenden Betrachtungen ebenfalls unschwer zu ermitteln. Für die Energieaufnahme durch das gestoßene Teilchen (Elektron in diesem Falle) ergab die kinematische Gleichung (5.2)

$$E_3 = E_1 \frac{4 M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} \cos^2 \Theta \xrightarrow[M_1 \gg M_2]{} E_1 \frac{4 m_e}{M} \cos^2 \Theta .$$

Aus den Winkelbeziehungen Gl. (5.15ff.) folgte

$$\Theta = \frac{\vartheta}{2} \text{ und } \vartheta + \varphi = \pi. \text{ Es wird demnach}$$

$$\Theta = \frac{\pi - \varphi}{2} \quad \text{und} \quad \cos^2\Theta = \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Für die Coulomb-Wechselwirkung ergab Gl. (5.21)

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{Z e^2}{M^* v^2 b} \quad \text{mit} \quad M^* = \frac{M m_e}{M + m_e} \approx m_e .$$

Für kleine Winkel φ, die bei den Rechnungen in Kap. 4.1. vorausgesetzt wurden, ist $\tan \varphi \approx \sin \varphi$. Man erhält also

$$E_e \approx E_1 \frac{4 m_e}{M} \tan^2 \frac{\varphi}{2} = E_1 \frac{4 m_e}{M} \frac{Z^2 e^4}{m_e^2 v^4 b^2} .$$

v ist die Relativgeschwindigkeit des anfliegenden Teilchens gegenüber dem (ruhenden) Elektron, also gleich der Geschwindigkeit des schweren Teilchens im Labor-System. Damit erhält man

$$E_e \approx \frac{M}{2} v^2 \frac{4 m_e}{M} \frac{Z^2 e^4}{m_e^2 r^4 e^2} = \frac{2 Z^2 e^4}{m_e v^2 b^2} .$$

Dies ist dasselbe Resultat, wie es in Gl. (4.4) erhalten wurde.

6. ERZEUGUNG VON TEILCHEN HOHER ENERGIEN

6.1. Linearbeschleuniger

Die ersten Beschleuniger für Ionen — in diesem Falle Protonen — wurden von COCKCROFT und WALTON im Jahre 1931 gebaut. Die Hochspannung wurde bei dieser Anordnung durch Spannungsvervielfachung nach GREINACHER und VILLARD erzielt (Abb. 27a). Bei derartigen Anordnungen findet in Abhängigkeit von der Belastung eine Spannungsabnahme und eine Zunahme der Welligkeit statt. Um diese Schwankungen klein zu halten, benötigt man Kondensatoren großer Kapazität. Vielfach verwendet man, um zu große Kondensatoren zu vermeiden, Wechselspannungen höherer Frequenz, z. B. 500 Hertz.

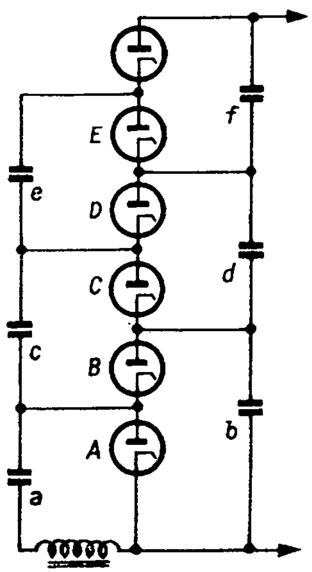


Abb. 27 a. Hochspannungsgenerator nach COCKCROFT und WALTON

Auf elektrostatischen Prinzipien beruhen die Hochspannungsgeneratoren, die VAN DE GRAAFF bereits 1931—1933 entwickelt hat. Von einem Motor wird ein isolierendes Band angetrieben, das von einer Spannungsquelle her mit elektrischer Ladung besprüht wird. In der oberen Haube wird die auf dem Band transportierte

Ladung abgesaugt und lädt somit sukzessive die Hochspannungselektrode auf, soweit die Isolierung sowie Entladungserscheinungen (Sprühen und Funken) das gestatten.

Für die industrielle Verwendung ist es besonders wertvoll, daß diese Generatoren mit verhältnismäßig geringem Aufwand in Druckkesseln unter erheblichem Druck geeigneter Gase betrieben werden können. Anlagen, die Spannungen von einigen Hunderttausend bis zu 1 Million Volt liefern, lassen sich auf relativ kleinem Raum unterbringen. Größere Anlagen, bis zu 12 MV, dienen insbesondere physikalischen Untersuchungen.

Eine ebenfalls in neuerer Zeit mehrfach verwendete Variante ist der sogenannte Tandem-van-de-Graaff (Abb. 27b). Er besteht aus der in Abb. 27b skizzierten Anordnung, deren erster Teil negative Ionen bis zu Energien von etwa 5 MeV

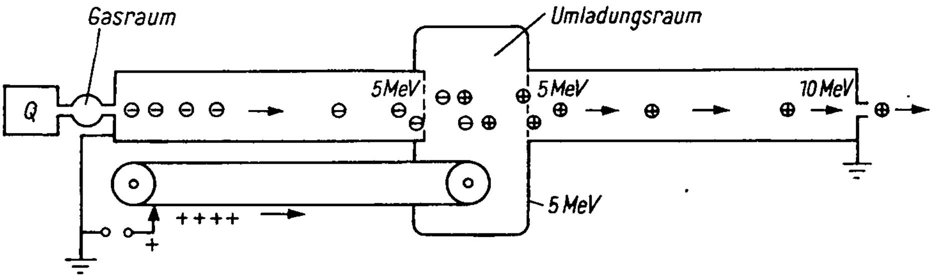


Abb. 27b. Prinzip des Tandem-van-de-Graaff-Generators

beschleunigt, dann folgt ein Gasraum, innerhalb dessen die negativen Ionen zwei Elektronen abstreifen und dann als positive Ionen noch einmal die Spannung von 5 MeV durchlaufen, also insgesamt die doppelte Spannung erreichen. Die Van-de-Graaff-Generatoren zeichnen sich durch große Konstanz und leichte Regulierbarkeit ihrer Spannung aus. Man wendet daher nach wie vor viel Mühe zur Verbesserung und Vereinfachung ihrer Konstruktion auf. Die Arbeit mit Tandemgeneratoren ist auch deshalb sehr vorteilhaft, weil Ionenquelle und Target (die häufig ausgewechselt werden müssen) auf Erdpotential liegen. Für die Physik mittlerer Energien — bis etwa 15 MeV — hat der Tandemgenerator hohe Bedeutung.

Die Verwendung der genannten Hochspannungsgeneratoren ist hinsichtlich der Höhe der erreichbaren Spannung im wesentlichen begrenzt durch Entladungsverluste infolge von Sprühentladungen oder schließlich Funkenbildung. Zu einem völlig anderen Prinzip der Teilchenbeschleunigung gelangten, nach ersten Überlegungen durch Wideröe (1928), Sloan und Lawrence im Jahre 1931 (Abb. 28). Legt man an eine durch zylindrische Rohrstücke entsprechend unterteilte Anordnung eine hochfrequente Wechselspannung, so läßt es sich einrichten, daß die innerhalb der Hohlzylinder laufenden Teilchen bei jedem Übergang von einem zum folgenden Zylinder, der durch entsprechende Konstruktion fokussierende Linseneigenschaften für den Ionenstrahl besitzt, beschleunigt werden. In diesem Falle ist der Zusammenhang zwischen der Länge l_n des n-ten Hohlzylinders, der Teilchengeschwindigkeit v_n und der Zeitdauer t des Durchlaufens dieses Zylinders im nichtrelativistischen Bereich gegeben durch $l_n = v_n t$. Die Zeit t ist, da während

des Durchlaufens des feldfreien Rohres sich dessen Spannungswert umkehrt, gegeben durch $t = 1/2f$, wobei f die konstante Frequenz der verwendeten Spannung ist. Setzt man an Stelle der Teilchengeschwindigkeit v_n die Energie E an der n-ten

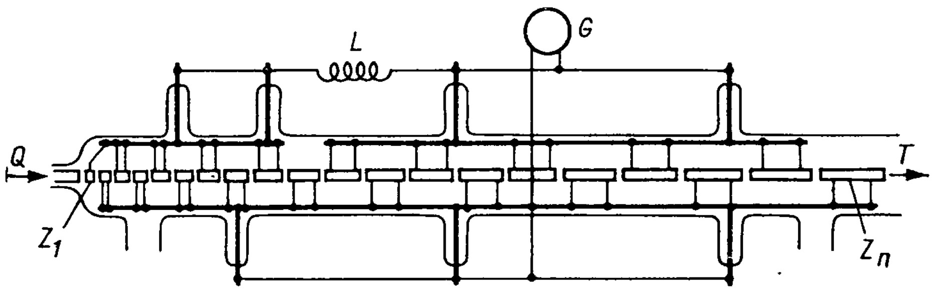


Abb. 28. Linearbeschleuniger nach SLOAN und LAWRENCE

Beschleunigungsstrecke ein, so erhält man $v = \sqrt{2E/m}$ und $E = neV$, wobei V die Spannung zwischen den einzelnen Beschleunigungsstrecken ist. Hieraus ergibt sich:

$$f = \frac{1}{2l_n} \sqrt{\frac{2neV}{m}}. \tag{6.1}$$

Man erkennt, daß die Länge l_n der Beschleunigungsstrecken proportional zu $\sqrt{n}$ wächst.

Zunächst wurde (1931!) für Hg-Ionen mit einer derartigen Anordnung eine Energie von etwa 1 MeV erreicht. Mit wachsender Entwicklung der Hochfrequenztechnik ist es unterdessen gelungen, mit diesem Verfahren Energien bis in die Größenordnung von 50 MeV für Protonen zu erreichen. Einige Schwierigkeiten bereitet die Fokussierung des Strahles. Da während des Durchgangs des Teilchens durch den als Linse wirkenden Spalt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Rohren eine Geschwindigkeitszunahme der Teilchen eintritt, ergibt sich eine von der Rohrachse hinweggerichtete Feldkomponente, die zur Defokussierung des Strahles führt. Durch zusätzliche Maßnahmen bezüglich der geometrischen Form der Beschleunigungsstrecken oder durch äußere Magnetfelder kann Fokussierung des Strahles erreicht werden. Beim heutigen Stand der Technik erscheinen derartige Anordnungen für Protonen mit Energien bis etwa 200 MeV von einigem Vorteil. Die Längen derartiger Anordnungen sind beachtlich; sie betragen 12 bis 40 Meter.

Für derartige Energien gilt naturgemäß nicht mehr Gl. (6.1), sondern es ist die relativistische Massenzunahme zu berücksichtigen. Dies sei hier nicht im einzelnen durchgeführt. Bei relativistischen Energien, also Energien, die groß gegenüber den Ruhenergien der Teilchen sind, was bei Linearbeschleunigern praktisch nur für Elektronen erreichbar ist, besitzen die Teilchen annähernd Lichtgeschwindigkeit. Die Länge der einzelnen Beschleunigungsstrecken ist demnach praktisch konstant

und beträgt $l_n = c/2f = \lambda/2$. Schließlich kann für Teilchen, deren Geschwindigkeit gleich oder nur wenig geringer ist als die einer — z. B. in einem Rohr — fortschreitenden Welle, ein etwas anderes Prinzip, das „Wellenreiterprinzip", angewendet werden. Da diese zu beschleunigenden Teilchen annähernd Lichtgeschwindigkeit besitzen müssen, ist dieses Prinzip bisher nur für Elektronen angewandt worden. Beschleuniger dieser Art befinden sich z. B. in Charkow, weitere sind in den USA in Projektierung. Die Längsausdehnung derartiger Apparate geht in die Größenordnung von Kilometern.

6.2. Kreisbeschleuniger

1931 kamen E. O. Lawrence und M. S. Livingston auf die außerordentlich glückliche Idee, die Bahnen der Teilchen in einem Linearbeschleuniger mit Hilfe eines Magnetfeldes quasi „aufzuwickeln" (Abb. 29). Die Teilchen werden jeweils

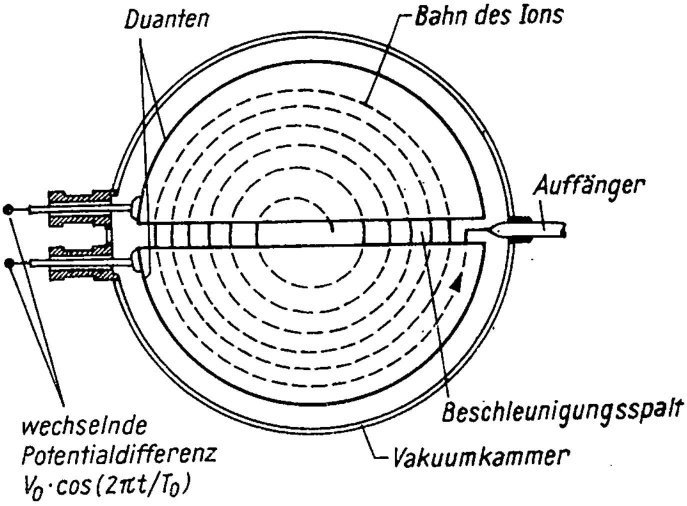


Abb. 29. Schema der Teilchenbahnen im klassischen Zyklotron

beim Durchgang durch das Feld zwischen den beiden halbkreisförmigen Elektroden (Dees) beschleunigt und beschreiben annähernd Kreisbahnen mit wachsendem Radius. Die Lorentz-Gleichung ergibt für diesen Fall, wenn m die Masse des Teilchens, v seine Geschwindigkeit, R den Bahnradius im Magnetfeld bedeutet,

$$\frac{mv^2}{R} = evB \quad \text{und} \quad R = \frac{mv}{eB}. \tag{6.2}$$

Ein Ion durchläuft die Kreisbahn in der Zeit

$$\tau = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{eB}. \tag{6.3}$$

Im vorliegenden, nichtrelativistischen Fall ist daher die Umlaufdauer bei konstantem e, m und B konstant. Daraus folgt, daß die Beschleunigung mit einer Wechselspannung der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/\tau$ zu erreichen ist. Die mit einem Zyklotron des Radius R erreichbare Energie für Teilchen der Ladung e und der Masse m wird

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{e^2}{2m} R^2 B^2 = 4 \cdot 8 \cdot 10^{-5} R^2 B^2 \,\text{MeV},$$

wobei R in cm, B in Kilogauß eingesetzt wird. Mit $R = 75$ cm und $B = 12$ Kilogauß ergibt sich $E_p = 9{,}7$ MeV. Mit diesem FF-Zyklotron (Festfrequenzzyklotron) lassen sich noch etwas höhere Energiewerte erreichen, da sowohl B (um etwa 50%) als auch R noch vergrößert werden kann. Die Zahl der Umläufe bis zum Erreichen des Endradius und damit der Maximalenergie kann nicht beliebig groß gemacht werden, weil dann selbst geringe Abweichungen von der Ruhenergie eine wachsende Verzögerung des Teilchenumlaufs und damit eine wachsende Verschlechterung des Synchronismus von Umlaufzeit und Betriebsfrequenz hervorrufen. Um die Zahl der Umläufe zu verringern, muß daher die Amplitude der Hochfrequenz groß sein, doch gelangt man dabei mit nicht zu komplizierten Mitteln bis in die Größenordnung von 100 kV. Ein voller Synchronismus zwischen der Hochfrequenz des elektrischen Feldes, den Dees und der Zeit des Teilchenumlaufes ist im „klassischen" Zyklotron nur annähernd erreichbar. Wie bei den anderen Beschleunigern, z. B. dem Synchrozyklotron, macht sich die Massenzunahme der zu beschleunigenden Teilchen bemerkbar, und zwar um so mehr, je höher die Teilchenenergie wird. Das hat zur Folge, daß die Teilchen mit wachsendem Radius, also mit wachsender Energie, zeitlich gegenüber der Wechselspannung an den Dees zurückbleiben und schließlich — was natürlich in der Praxis vermieden wird — in verzögernde Bereiche der Wechselspannung zwischen den Dees gelangen. Wie schon bei den Linearbeschleunigern erwähnt wurde, ist auf die Fokussierung des Teilchenstrahls größte Aufmerksamkeit zu verwenden. Die Fokussierung geschieht im FF-Zyklotron durch eine geringe Abnamhe des Magnetfeldes zum äußeren Rande hin. Auch hierdurch wird der Synchronismus zwischen der Periode der Hochfrequenz und der Umlaufzeit der Teilchen wachsend verschlechtert, so daß durch die genannten Einflüsse eine Begrenzung der mit dem Zyklotron erreichbaren Teilchenenergien gegeben ist.

Das obige Beispiel wurde für die Beschleunigung von Protonen durchgeführt. In neuerer Zeit gewinnt die Untersuchung von Kernprozessen mit schweren Ionen wachsende Bedeutung. So hat das Dubnaer Zyklotron einen Polschuhdurchmesser von 3,10 m, und die Beschleunigung zwischen den Elektroden beträgt etwa 300 kV. Mit dieser Anordnung werden mehrfach geladene Ionen bis etwa zum Eisen beschleunigt. Diese Methode hat besondere Bedeutung für die Erzeugung von Transuranen gewonnen, wobei es Flerow gelang, nicht nur das Element $Z = 104$ darzustellen, sondern auch wichtige Ergebnisse bezüglich der

Lebensdauer, der Aktivität und der spontanen Spaltung derartiger Elemente zu erzielen.

Wie aus den Daten der im Anhang verzeichneten Teilchenenergien und Radien der Zyklotronmagnete hervorgeht, ist die Beschleunigung von Protonen im FF-Zyklotron mit Energien wenig oberhalb von 10 MeV begrenzt. Auch aus Gl. (6.3) erkennt man, daß die Frequenz mit wachsender relativistischer Masse m nicht mehr konstant ist. Um zu höheren Energien zu gelangen, wird mit wachsender Teilchenenergie bzw. wachsendem Magnetradius eine Vergrößerung des Magnetfeldes B oder eine Verringerung der Frequenz f notwendig.

Das Synchrozyklotron, bei dem die Frequenz der Spannung zwischen den Dees periodisch geändert wird, das Magnetfeld jedoch konstant bleibt, hat folgende Grundlage. Die Beschleunigung der vom Zentrum des Magnetfeldes ausgehenden Ionen findet nicht mehr bei jeder Halbwelle richtigen Vorzeichens statt, sondern ein Bündel oder „Paket" von Ionen wird vom Zentrum bis zum Rand des Magneten bewegt, wobei die Frequenz synchron zur Bewegung des Teilchenpaketes vom Magnetzentrum zum Magnetrand im notwendigen Maß verringert wird. Es läßt sich erreichen, daß ein derartiges Ionenpaket 100mal pro Sekunde das Synchrozyklotron durchläuft. Im Vergleich zum Festzyklotron, dessen Frequenz in der Größenordnung von 10 MHz liegt, ist die Intensität des Ionenstrahles beim Synchrozyklotron (FM-Zyklotron = frequenzmoduliertes Zyklotron) recht gering. Die mit derartigen Apparaturen bisher erreichten Energien liegen bei 700 MeV für Protonen.

Die Funktionsweise des Synchrozyklotrons und der weiter unten zu beschreibenden Kreisbeschleuniger beruht zu wesentlichen Anteilen auf einem 1944 und 1945 unabhängig von W. I. Weksler und E. M. McMillan entdeckten Prinzip, der Autophasierung. Diese Autoren überlegten, welche Vorgänge eintreten können, wenn das Prinzip des klassischen Zyklotrons, daß nämlich die Umlauffrequenz der Teilchen und die Frequenz der HF-Spannung genau übereinstimmen müssen, nicht mehr erfüllt ist. Teilchen, deren Phasenlage für die Umlauffrequenz gegenüber der für die Hochfrequenz um $\pi/2$ verschieden ist, passieren die Spalte zwischen den Dees offenbar immer dann, wenn zwischen ihnen die Spannung 0 ist. Sie können also beliebig lange im Magnetfeld der Apparatur kreisen. Ein Teilchen, bei dem der genannte Phasenunterschied $< \pi/2$ ist, durchläuft beschleunigende Felder, erhält damit eine höhere Energie und gelangt auf größere Radien, was eine Vergrößerung der Umlaufzeit zur Folge hat. Hierdurch wird jedoch der Phasenwinkel wieder größer und nähert sich $\pi/2$, das Teilchen überschreitet diesen Winkel und gerät in verzögernde Spannungen, wird somit verlangsamt und kommt wieder in die Bahn mit kleinerem Radius, den Synchronkreis, über den es nach innen zu ein wenig pendelt, und wegen seiner Energie, die bei dem erreichten kleineren Radius etwas größer als die Resonanzenergie ist, kehrt es wieder zurück zu größeren Radien, über den Phasenwinkel $\pi/2$ hinauspendelnd. Beim FF-Zyklotron sind die drei Größen R_s, E_s und der Phasenwinkel $\varphi = \pi/2$ stabile Größen, um die die Teilchen kleine Schwingungen ausführen. Es läßt sich jedoch zeigen, daß auch andere Anfangsbedingungen, z. B. $R = R_s$, $\varphi = \pi/2$ und $E = E_s$ zu entsprechenden Schwingungen führen können. (R_s, E_s und $\pi/2$ sind Radius, Energie und Phasenwinkel der Wechselspannung für den Fall der Synchronisierung.) Die Wirkungsweise des Synchrozyklotrons läßt sich nun

derart verstehen, daß infolge der Frequenzvariation der Radius des Kreises, auf dem Synchronismus vorhanden ist, periodisch verlagert wird. Um diesen wandernden Synchronkreis erfolgen zahlreiche der genannten „Synchronschwingungen" mit geringer Amplitude. Da die Umlaufzahl der Teilchen nicht mehr, wie beim FF-Zyklotron, durch Verlagerung des Phasenwinkels zwischen Umlauf- und Hochfrequenz begrenzt ist, kann das FM-Zyklotron mit einer viel geringeren Spannungsamplitude arbeiten.

Es ist jedoch die Zahl der Umläufe des Teilchenpaketes wesentlich höher als die entsprechende Anzahl beim FF-Zyklotron.

Variiert man nicht nur die Frequenz, sondern auch das Magnetfeld, so gelangt man zum Prinzip des Synchrotrons. In diesem Falle läßt sich der Beschleuniger in Form eines Ringmagneten ausführen. Um Protonen, also Teilchen mit hoher Masse, annähernd auf Lichtgeschwindigkeit zu bringen, bedarf es besonderer Maßnahmen. Zunächst einmal müssen die Teilchen mit möglichst hoher Geschwindigkeit in den Magnetring eingeschossen werden. Das geschieht mit Hilfe von Vorbeschleunigern (Linearbeschleunigern) die den Protonen Energien von etwa 20—50 MeV mitteilen. Je höher diese Energie ist, um so geringer wird die benötigte Variation von Magnet- und Hochfrequenzfeld. Da diese Energien noch weit von relativistischen Energien entfernt sind, muß außer dem Anstieg des Magnetfelds noch eine innerhalb erheblicher Bereiche variable Frequenzmodulation erfolgen ($\approx 1:10$). Naturgemäß lassen sich für Elektronen wesentlich leichter relativistische Energien erreichen, so daß die Bedingungen für ein Elektronensynchrotron andersartig und in gewissem Sinne einfacher sind.

Es würde über den Rahmen einer Einführung in die Physik des Atomkerns hinausführen, wollten wir hier auf die komplizierte Berechnung derartiger Beschleuniger eingehen, zumal es hierüber umfangreiche Spezialliteratur gibt. Aus ähnlichen Gründen wird auch auf die Beschreibung der Elektronenbeschleuniger (Betatron) verzichtet. Nur kurz seien einige neuere Varianten der Kreisbeschleuniger genannt.

Weiter oben wurde erwähnt, daß die zu beschleunigenden Teilchen um die Kreisbahn herum Schwingungen ausführen, die zum Teil erhebliche Amplituden erreichen können. Die Abmessungen des Ringmagneten eines Synchrotrons dürfen daher nicht zu klein sein. Die Durchrechnung dieser Schwingungsprobleme zeigt, daß sich durch die Zerlegung des Ringmagneten in Teilstücke mit abwechselnd positiver und negativer Richtung des Magnetfeldes eine wesentliche Fokussierung des Strahles erreichen läßt. Nach diesem Prinzip ist das Protonenzyklotron im „CERN" aufgebaut, das bei einem Radius des Magnetringes von etwa 100 m Protonen auf Energien bis zu 28 GeV beschleunigt. Mit dem in Serpuchow errichteten Synchrotron werden Protonenenergien über 70 GeV erzielt.

Weitere Arten von Kreisbeschleunigern sind in Entwicklung. So hat man eine bereits 1938 von L. H. Thomson in ihren Grundprinzipien angegebene Anordnung, die eine azimutale Änderung des Magnetfeldes durch besonders gestaltete Polschuhe bei sonst fester Frequenz und zeitlich konstantem Magnetfeld vorsieht, weiterentwickelt zum AVF-Gerät (Azimutally Varying Field). Diese Variante, die zu besonders hohen Stromstärken für die beschleunigten Teilchen führt, ist insbesondere (zunächst in geringem Maßstabe als Versuchsmodell) in Dubna ausgearbeitet worden.

Schließlich ist noch kurz zu erwähnen, daß bei Sektorfokussierung auch bei festem Magnetfeld die Zunahme des Bahnradius in engen Grenzen gehalten werden kann und damit zu ringförmigen Anordnungen führt. In diesem Falle ist jedoch eine Frequenzmodulation notwendig, d. h., man erhält ein ringförmiges Synchrozyklotron. Diese Anordnung wird in der amerikanischen Literatur als FFAG-Synchrotron (Fixed Field Alternating Gradient) bezeichnet. Der Vorteil derartiger Anordnungen ist eine gegenüber den Synchrozyklotrons höhere Intensität. Die Ersparnis an Eisen gegenüber dem Synchrozyklotron dürfte durch die wesentlich kompliziertere Herstellung derartiger Apparate reichlich kompensiert werden. Derartige Apparaturen sind jedoch derzeit noch in der Entwicklung, die Berechnung von Beschleunigern bis zu Energien von 1000 GeV sind bereits an verschiedenen Stellen im Gange.

7. NEUTRONEN

7.1. Erzeugung und Eigenschaften

Obwohl das Neutron als ungeladener Bestandteil der Atomkerne bekannt ist, hat es allgemeines Interesse zu wissen, wieweit das Fehlen einer elektrischen Ladung gesichert ist. P. I. DEE folgerte bereits 1932, kurz nach der Entdeckung des Neutrons durch CHADWICK, aus Aufnahmen in der Wilsonschen Nebelkammer, daß ein Neutron von einigen MeV während eines Weges von etwa 3 m in Luft nicht mehr als 1 Ionenpaar zufolge direkter Wechselwirkung mit Elektronen erzeugt. Das führte zu der Feststellung, daß das Neutron nicht mehr als etwa 1/700 der Einheitsladung besitzen kann. Eine weniger direkte Abschätzung der Neutronenladung beruht auf der Beobachtungstatsache, daß alle Atome des periodischen Systems elektrisch neutral sind. Da sich das Verhältnis von Neutronen zu Protonen im periodischen System der Elemente von 1 (für H) bis zu 1,6 (für U) ändert, besagt das, daß der Unterschied der Ladungen von Protonen und Elektronen klein ist, daß folglich auch eine eventuelle Ladung des Neutrons nur klein sein kann. Weitere Möglichkeiten zur Abschätzung der Neutronenladung bietet der Zerfall des Neutrons in Proton, Elektron und Neutrino. Auch diese Abschätzungen ergeben außerordentlich geringe Ladungen des Neutrons in der Größenordnung 10^{-12} Einheitsladungen (RABI und Mitarbeiter) bzw. nach Abschätzungen von FERMI und MARSHALL (1947) höchstens 10^{-18} Elektronenladungen.

Die genauesten Massebestimmungen des Neutrons sind auf indirektem Wege erhalten worden. Dazu werden Kernreaktionen untersucht, bei denen alle Massen und Energien außer der des Neutrons bekannt sind. CHADWICK erhielt aus der Reaktion ^{11}B (α, n) ^{14}N eine erste Abschätzung der Neutronenmasse. Aus der Bindungsenergie des Deuterons kann, nach Vorschlag von CHADWICK, ebenfalls die Neutronenmasse bestimmt werden. Bei Verwendung der γ-Strahlung von ThC'', $E_\gamma = 2{,}61$ MeV, wird das Deuteron in ein Proton und ein Neutron zerlegt. Durch Messung der Energie des bei diesem Prozeß fortfliegenden Protons und Neutrons wurde festgestellt, daß die Bindungsenergie für das Deuteron 2,23 MeV beträgt. Auch aus dem Schwellenwert der γ-Strahlenenergie für den Kernphotoeffekt des Deuterons läßt sich die Neutronenmasse mit guter Genauigkeit bestimmen.

Von BELL und ELLIOT (1950) wurde eine genaue Messung der Energie von γ-Quanten durchgeführt, die beim Einfang von Neutronen sehr geringer Energien durch Protonen emittiert werden. Das ist der zum Kernphotoeffekt des Deuterons inverse Prozeß. Auf Grund der von den Autoren ermittelten Energie der γ-Strahlung von $2{,}23 \pm 0{,}007$ MeV und neuerer Daten erhielt man eine Bindungs-

energie für das Deuteron von 2,2245 MeV und damit eine Masse des Neutrons von 1,0086652 Masseneinheiten ($^{12}C = 12$) oder 939,512 MeV.

Nach den ersten Massenbestimmungen des Neutrons durch CHADWICK und GOLDHABER (1934) wurde festgestellt, daß die Masse des Neutrons größer als die des Protons ist. ($M_p = 1{,}0078252$ Masseneinheiten oder 938,730 MeV). Daraus wurde geschlossen, daß das Neutron instabil ist und unter Emission eines Elektrons und eines Antineutrinos in ein Proton übergeht. Neuere Untersuchungen haben für die Energie des β^--Zerfalls des Neutrons eine Energie von 782,45 keV ergeben.

Wie das Proton besitzt auch das Neutron den Spin 1/2. Aus dem Wirkungsquerschnitt und der Energieabhängigkeit der Streuung von Neutronen an Protonen, dem Betrag der magnetischen Momente von Deuteron, Proton und Neutron ist das experimentell nachgewiesen worden. Ebenso bestätigen die Eigenschaften der kohärenten Streuung von Neutronen an Wasserstoff sowie die Polarisationserscheinungen bei der Streuung von langsamen Neutronen an ferromagnetischen Medien die Zuordnung des Spins 1/2 für das Neutron.

Die Existenz eines magnetischen Moments beim Neutron erscheint zunächst schwer erklärbar, da das Neutron keine elektrische Ladung besitzt. Versuche von HOFSTADTER, der aus der Streuung hochenergetischer Elektronen eine Ladungsverteilung im Neutron derart, daß es von außen her ungeladen erscheint, ermittelte, lassen die Existenz eines magnetischen Moments verstehen. Der erste Beweis dafür, daß das Neutron sein eigenes magnetisches Moment besitzt, rührt daher, daß sich die magnetischen Momente von Deuteron und Proton stark voneinander unterscheiden, nämlich $\mu_d < \mu_p$. Daß das Deuteron den Spin 1 besitzt, ist aus den einfachsten Vorstellungen über den Bau des Deuterons zu erwarten (Neutron + Proton im Zustand ^3S). Das magnetische Moment des Deuterons, $\mu_d = \mu_p + \mu_n$, sollte etwa den Wert -2 besitzen. Das negative Vorzeichen bedeutet, daß das Impulsmoment und sein magnetisches Moment für das Neutron entgegengesetzt gerichtet sind. Die sorgfältige Bestimmung ergab für das magnetische Moment des Neutrons den Wert

$$\mu_n = -1{,}91315 \pm 0{,}00009 \text{ Kernmagnetonen.}$$

Nach den Gesetzen der Quantenmechanik ist dem Neutron eine De-Broglie-Welle λ zuzuordnen, deren Betrag für nichtrelativistische Geschwindigkeiten eines Neutrons der kinetischen Energie T und des Impulses p gegeben ist durch

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{h}{(2MT)^{1/2}} = 2{,}86 \cdot 10^{-6}, \quad T \text{ in MeV.}$$

Je nach der Energie der Neutronen findet man Angaben ihrer De-Broglie-Wellenlängen als Funktionen der Energien in MeV, der Geschwindigkeiten und der Temperaturen in °K (Tabellen 10, 11).

Tabelle 10

Kern	Masse $^{12}C = 12$	Spin	Magn. Moment Kernmagn.	Quadrupolmoment $10^{24}\, e \cdot cm^2$
Proton	1,007825	$\frac{1}{2}$	2,7927	
Neutron	1,008665	$\frac{1}{2}$	1,9131	
Deuteron	2,001410	1	0,8574	$2{,}73 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 11

Benennung	T eV	T °K	v cm/s	λ cm
Kalte Neutronen	10^{-3}	11,6	4,37	$9{,}04 \cdot 10^{-8}$
Thermische Neutronen	$2{,}5 \cdot 10^{-2}$	290	$2{,}19 \cdot 10^{5}$	$1{,}81 \cdot 10^{-8}$
Langsame Neutronen (Resonanzneutronen)	1,0	$1{,}16 \cdot 10^{4}$	$1{,}38 \cdot 10^{6}$	$2{,}86 \cdot 10^{-9}$
Resonanzneutronen	10^{2}	$1{,}16 \cdot 10^{6}$	$1{,}38 \cdot 10^{7}$	$2{,}86 \cdot 10^{-10}$
Mittlere Energien	10^{4}	$1{,}16 \cdot 10^{8}$	$1{,}38 \cdot 10^{8}$	$2{,}86 \cdot 10^{-11}$
Schnelle Neutronen	10^{6}	$1{,}16 \cdot 10^{10}$	$1{,}38 \cdot 10^{9}$	$2{,}86 \cdot 10^{-12}$
Sehr hohe Energien	10^{8}	$1{,}16 \cdot 10^{12}$	$1{,}28 \cdot 10^{10}$	$2{,}79 \cdot 10^{-13}$
Relativistische Neutronen	10^{10}	$1{,}16 \cdot 10^{14}$	$2{,}99 \cdot 10^{10}$	$1{,}14 \cdot 10^{-14}$

Neutronenquellen

Als Neutronenquellen dienen die Reaktionen (α, n), (γ, n) und mit Hilfe beschleunigter geladener Teilchen, (p, n), (d, n) und (t, n), schließlich die im Reaktor aus der Kernspaltung hervorgehenden Neutronen.

Zur Entdeckung des Neutrons führte die Reaktion

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \longrightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + \mathrm{n}\,.$$

Diese Reaktion ist exotherm und liefert eine Energietönung von $Q = 5{,}65$ MeV. Mit α-Teilchen von Polonium ($E_\alpha = 5{,}3$ MeV) wird man daher Neutronen von 10,8 MeV in Richtung der einfallenden α-Teilchen bis zu 6,7 MeV in rückwärtiger Richtung erhalten. Jedoch besitzen die Neutronen, die bei der genannten Reaktion entstehen, teilweise sehr viel geringere Energien, weil der Endkern vielfach in einem seiner angeregten Zustände zurückbleibt. Weiterhin werden für derartige Neutronenquellen, Ra + Be oder Po + Be, Targets von größerer Dicke verwendet — Gemische von Be-Pulver mit aktiver Substanz —, so daß infolge von Abbremsung α-Teilchen aller Energien von geringerer bis zur Maximalenergie wirksam werden können. Wegen der Höhe des Coulomb-Walles, der für α-Teilchen und Be etwa 3,7 MeV beträgt, können α-Teilchen geringerer Energien nur mit exponentiell abnehmender Wahrscheinlichkeit in den Be-Kern eindringen. Da der Compoundkern ^{13}C mehrere Resonanzniveaus besitzt, wird die Intensitätsverteilung des Neutronenspektrums aus solchen Präparaten recht kompliziert (vgl. Abb. 30).

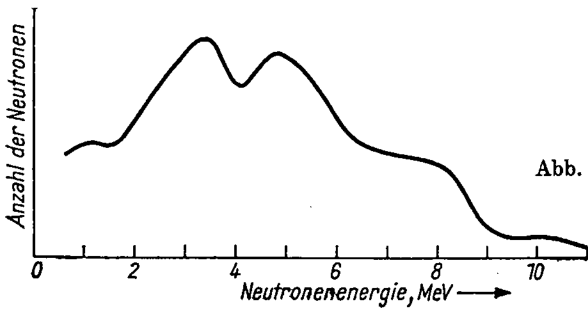


Abb. 30. Neutronenspektrum einer Po—Be-Quelle

Als weitere Neutronenquelle dienen Präparate von Ra + Be. Wegen der fünf α-Strahlen, die Ra mit seinen Folgeprodukten enthält, ist das Spektrum derartiger Neutronenquellen ebenfalls kompliziert und wenig genau gemessen, da die intensive γ-Strahlung dieser Quellen die Messung sehr erschwert. Das Neutronenspektrum erstreckt sich bis gegen 13 MeV und hat im Bereich um 4 MeV ein breites Maximum. Mehr als 10% der Gesamtzahl der Neutronen dieser Präparate besitzen Energien unterhalb von 1 MeV.

Außer dem Beryllium können als Neutronenquellen die (α, n)-Prozesse einiger weiterer, leichterer Elemente verwendet werden, z. B. Ra + B und Ra + ^{18}F, die gegenüber den obenerwähnten Neutronenspektren andersartige Energieverteilungen besitzen. Jedoch sind bei den beiden letztgenannten Reaktionen die Neutronenausbeuten wesentlich geringer. Die Ausbeute derartiger Neutronenpräparate, die völlig abgeschlossen und daher wegen des geringen Aufwandes leicht zu handhaben sind, liegt in der Größenordnung von 10^{-5} bis 10^{-4} Neutronen pro α-Teilchen.

Zur Erzeugung von Photoneutronen dient die (γ, n)-Reaktion. Zwei dieser Reaktionen haben genügend kleine Schwellenwerte, so daß sie als Quellen gut monochromatischer Neutronen verwendet werden können.

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + \gamma \longrightarrow {}^{8}_{4}\mathrm{Be} + \mathrm{n}, \qquad \text{Schwelle } 1{,}67\ \mathrm{MeV};$$

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + \gamma \longrightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{H} + \mathrm{n}, \qquad \text{Schwelle } 2{,}23\ \mathrm{MeV}.$$

Als γ-Quelle für diese Reaktionen ist besonders ^{24}Na geeignet, das eine Energie der γ-Strahlen von 2,76 MeV besitzt und bei hoher Ausbeute recht gut monochromatische Neutronen von fast 1 MeV Energie liefert. Die Halbwertszeit beträgt allerdings nur 14,9 Stunden. Ähnlich gute Ausbeuten an Neutronen liefert ^{124}Sb mit γ-Energien von 1,7 MeV und einer Halbwertszeit von 60 Tagen. Die Neutronenenergien betragen in diesem Falle etwa 23 keV. Mit Deuterium liefert ^{24}Na hohe Neutronenausbeuten mit Energien von etwa 220 keV. Beide γ-Präparate sind bereits in kleinen Kernreaktoren mit Intensitäten der Größenordnung 10 Curie unschwer herzustellen.

Weitaus größere Bedeutung haben heute Neutronenquellen, die durch Kernreaktionen mit künstlich beschleunigten Teilchen erreichbar sind. Von diesen seien die folgenden genannt:

$$\mathrm{D} + \mathrm{D} \longrightarrow {}^{3}\mathrm{He} + \mathrm{n} + 3{,}27\ \mathrm{MeV}$$

$$^{3}_{1}\mathrm{H} + \mathrm{D} \longrightarrow {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{n} + 17{,}6\ \mathrm{MeV}$$

$$^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{3}\mathrm{He} + \mathrm{n} - 0{,}764\ \mathrm{MeV}$$

$$^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{7}\mathrm{Be} + \mathrm{n} - 1{,}65\ \mathrm{MeV}$$

Insbesondere die beiden letztgenannten Reaktionen liefern unter geeigneten Bedingungen gut monochromatische Neutronen, allerdings erfordern sie, wegen der negativen Energietönung, wesentlich höhere Energien der Primärteilchen als die

ersten beiden Reaktionen. Abbildung 31 zeigt, in welcher Weise die Ausbeute an Neutronen für die günstigsten Reaktionen mit der Primärenergie ansteigt..

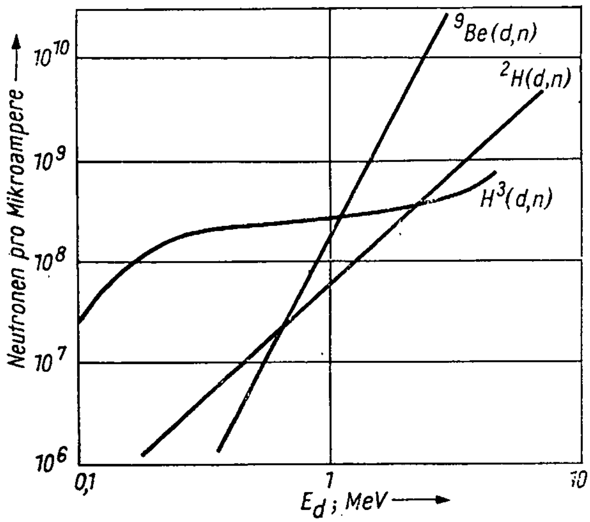


Abb. 31. Ausbeute an Neutronen bei verschiedenen Kernreaktionen aus dicken Targets

7.2. Bremsung von Neutronen

Da die Neutronen als ladungslose Teilchen nicht mit den Elektronen der Materie reagieren, wird die Änderung ihrer Energie lediglich durch Zusammenstöße mit Atomkernen verursacht. Weil Neutronenquellen, insbesondere die Kernreaktoren, schnelle Neutronen liefern, Kernreaktionen und Spaltung jedoch mit großem Wirkungsquerschnitt bei langsamen Neutronen zu beobachten sind, ist die Frage der Verlangsamung von Neutronen für Physik und Technik von erheblicher Bedeutung. Ähnlich wie in Kap. 5.1. der Zusammenstoß zweier Teilchen behandelt wurde, sei nun der Stoßmechanismus zwischen einem Neutron, $M_1 = 1$, mit einem Kern, $M_2 = A$, betrachtet. Abbildung 25 zeigt die Geschwindigkeitsvektoren und die Winkel im Laboratoriums- und im Schwerpunktsystem. Man erhält für V_4

$$V_4^2 = (V_4^S)^2 + \left(\frac{1}{A+1} V_1\right)^2 - 2 V_4^S \left(\frac{1}{A+1} V_1\right) \cos(\pi - \varphi)$$

$$= V_1^2 \frac{1}{(A+1)^2} (A^2 + 1 + 2A \cos\varphi) \qquad (7.1)$$

und

$$\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^2 = \frac{E_4}{E_1} = \frac{1}{(A+1)^2}(A^2 + 1 + 2A\cos\varphi) = \frac{E}{E_0}.$$

Da für φ die Beziehung $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ gilt, erhält man für E_4

$$\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 \leqq E \leqq E_0.$$

Für die Beziehung zwischen Φ und φ läßt sich Gl. (5.15) in folgender Form schreiben:

$$\cos\Phi = \frac{A\cos\varphi + 1}{\sqrt{A^2 + 1 + 2A\cos\varphi}}. \tag{7.2}$$

Von Interesse ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Neutronenenergie in einem Intervall zwischen E und $E + \mathrm{d}E$ liegt: $\mathrm{d}w/\mathrm{d}E$. Es sei eine im Schwerpunktsystem isotrope Streuung (S-Streuung) angenommen. Dann wird

$$\mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}\omega}{4\pi}\sigma(\varphi) = \frac{2\pi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{4\pi}\sigma(\varphi) = \frac{1}{2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\sigma(\varphi).$$

Aus Gl. (7.2) erhält man

$$\frac{\mathrm{d}E}{E_0} = \frac{2A\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{(A+1)^2} = \frac{4A\,\mathrm{d}\omega}{(A+1)^2}\frac{1}{\sigma(\varphi)}.$$

Es ergibt sich demnach

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}E} = \frac{(A+1)^2}{E_0\cdot 4A}\sigma(\varphi). \tag{7.2a}$$

Für konstante Energie E_0 und isotrope Streuung, $\sigma(\varphi) = \text{const}$ ist auch $\mathrm{d}w/\mathrm{d}E$ konstant. Durch Mittelwertbildung folgt:

$$\bar{E} = E_0\frac{A^2+1}{(A+1)^2}. \tag{7.3}$$

Für $A = 1$, also beim Zusammenstoß von Neutronen mit Wasserstoffkernen, wird $\overline{E_{\mathrm{H}}} = E_0/2$.

Das Ergebnis dieser Betrachtungen ist folgendes: Wenn ein Strom von Neutronen homogener Energie E_0 in eine mit Wasserstoffgas gefüllte Kammer tritt, so hat das Spektrum der gestoßenen Protonen für mittlere Energiewerte, bei denen die Streuung isotrop ist, eine Form, wie sie in Abb. 32 veranschaulicht ist. Dies gilt unter der Voraussetzung, daß mehrfache Streuung nicht auftritt, die Kammer also seicht ist.

Im Zusammenhang mit der Verlangsamung von Neutronen tritt häufig folgende Frage auf: Wie ist die Energieverteilung von Neutronen nach n Zusammenstößen mit Wasserstoffkernen? Diese Funktion hat folgendes Aussehen (BREIT und CONDON, 1936):

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}E_n} = \frac{1}{(n-1)!\,E_0}\left(\ln\frac{E_0}{E}\right)^{n-1}.$$

Hieraus folgt für die mittlere Energie nach n Zusammenstößen

$$\overline{E_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n E_0. \tag{7.4}$$

Betrachtet man diese Verteilungsfunktion, so sieht man, daß $\overline{E}$ einen wenig deutlichen Eindruck von der Verteilung vermittelt, da eine sehr große Anzahl von Neutronen wesentlich geringere Energien besitzt.

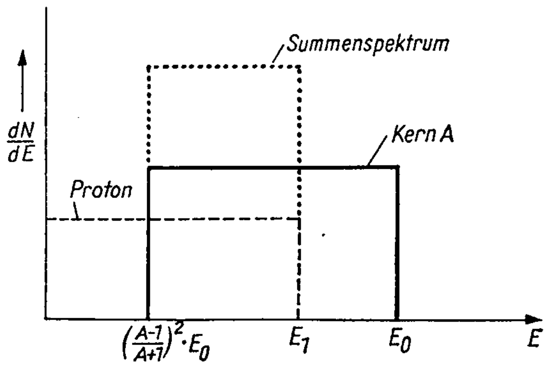


Abb. 32. Schema der Spektren von Rückstoßkernen für H ($A = 1$) und den Kern A

Ferner interessiert bei der Bremsung von Neutronen, wie groß die Zahl der notwendigen Zusammenstöße ist, damit aus einem Neutronenstrahl der Energie E_0 die Mehrzahl der Neutronen bis zu thermischen Energien abgebremst wird. Aus den Gleichungen (7.5) und (7.9) ist ersichtlich, daß der relative Energieverlust sowohl bei der Einzelstreuung als auch für den Mittelwert nicht von der Anfangsenergie abhängig ist. Wenn wir demnach die Energiewerte des Neutrons bei aufeinanderfolgenden Streuwerten auftragen, werden wir im logarithmischen Maß gleichgroße Intervalle erhalten. Es ist daher für diese Betrachtungen bequemer, statt mit der Energie mit ihrem Logarithmus zu rechnen.

Die folgenden Betrachtungen über die Energieverluste bei der elastischen Streuung von Neutronen werden unter der Voraussetzung durchgeführt, daß die Zahl der Zusammenstöße bis zur gesuchten Endenergie groß ist und daß die Energieverluste beim Zusammenstoß deren mittlerem Energieverlust pro Zu-

sammenstoß gleich wird. Dieser Mittelwert wird folgendermaßen bestimmt:

$$\xi = \overline{\varepsilon_0 - \varepsilon} = \overline{\ln \frac{E_0}{E}} = \frac{\int\limits_{E_{\min}}^{E_{\max}} \ln \frac{E_0}{E} \, \mathrm{d}E}{\int\limits_{E_{\max}}^{E_{\min}} \mathrm{d}E}$$

$$= 1 - \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \left(\frac{A+1}{A-1}\right), \tag{7.5}$$

da $E_{\min} = \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2} E_0$ und $E_{\max} = E_0$ ist. Für den Ausdruck unter dem Logarithmus gilt

$$(A+1) : (A-1) = 1 + \frac{2}{A} + \frac{2}{A^2} + \cdots$$

und für große A

$$\ln \left(\frac{A+1}{A-1}\right) \approx \ln \left(1 + \frac{2}{A}\right) \approx \frac{2}{A}.$$

Demnach wird $\xi \approx 1$ für Wasserstoff. Eine bessere Näherung erhält man nach Fermi:

$$\xi \approx \frac{2}{A + \frac{2}{3}} \quad \text{für } A > 1. \tag{7.6}$$

ξ ist der mittlere logarithmische Energieverlust bei einem Zusammenstoß. Für n Zusammenstöße gelten demnach die Beziehungen

$$\ln E_n = \ln E_0 - \sum_{j=0}^{n-1} \ln \frac{E_j}{E_{j+1}},$$

$$\overline{\ln E_n} = \ln E_0 - \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\ln \frac{E_j}{E_{j+1}}}.$$

Da $\xi = \overline{\ln \frac{E_j}{E_{j+1}}}$ ist, erhält man

$$\overline{\ln E_n} = \ln E_0 - n\xi.$$

Der Mittelwert $\overline{\ln E_n}$ ist nicht sehr verschieden von $\ln E_n'$, wo E_n' die mittlere Energie nach n Zusammenstößen bedeutet; daher kann man setzen:

$$E_n' \approx E_0 \mathrm{e}^{-n\xi} \qquad \left(n\xi = \ln \frac{E_0}{E_n}\right). \tag{7.7}$$

Es läßt sich demnach unmittelbar die Zahl der Stöße bestimmen, die bei bekanntem ξ zur Abbremsung eines Neutrons der Energie E_0 bis zur Energie E_n' notwendig ist. In Tabelle 12 ist die Zahl der Stöße angegeben, die zur Verringerung der Neutronenenergie von 1 MeV bis zur thermischen Energie von 0,04 eV notwendig ist. Für Wasserstoff wird, da $\xi = 1$ ist, $n = \ln 4 \cdot 10^7 = 17{,}5$.

Tabelle 12

Element	A	ξ	$\frac{2}{A + 2/3}$	$\frac{2}{A}$	n
Wasserstoff	1	1			17,5
Deuterium	2	0,725	0,75	1,0	23,5
Helium	4	0,427	0,43	0,50	40
Beryllium	9	0,21	0,21	0,22	81
Kohlenstoff	12	0,158	0,158	0,167	108
Blei	207	0,0096	0,0096	0,0097	1770

Nach den bisherigen Ausführungen läßt sich unschwer die mittlere Entfernung eines Neutrons der Energie E errechnen, das von einer punktförmigen Quelle mit der Energie E_0 emittiert wurde. Der mittlere quadratische Abstand des Neutrons von der Quelle sei $\overline{R^2(E)}$. Die Gesamtzahl der notwendigen Stöße ist nach Gl. (7.7) $n = \frac{1}{\xi} \ln \frac{E_0}{E}$. Wenn die mittlere freie Weglänge für alle Neutronen konstant und gleich λ ist, dann wird der mittlere quadratische Weg, den die Neutronen bis zur Abbremsung auf E durchlaufen,

$$\overline{R^2} = n\lambda^2 = \frac{1}{\xi} \ln \left(\frac{E_0}{E}\right) \lambda^2.$$

Der Wert von λ wird im vorliegenden Fall aus der Bedingung bestimmt, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Zusammenstoß längs des Wegelements $\mathrm{d}r$ gegeben ist durch $\mathrm{d}r/\lambda$. Wenn $P(r)$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß das Neutron nach dem Wege r einen Zusammenstoß erleidet, dann wird

$$\mathrm{d}P(r) = -P(r)\frac{\mathrm{d}r}{\lambda} \quad \text{und} \quad P(r) = \mathrm{e}^{-\frac{r}{\lambda}}.$$

Die mittlere freie Weglänge lautet damit

$$\bar{r} = \frac{\int\limits_0^\infty r\,P(r)\,\mathrm{d}r}{\int\limits_0^\infty P(r)\,\mathrm{d}r} = \lambda.$$

Für den Mittelwert des Quadrats von r erhält man

$$\overline{r^2} = \frac{\int r^2 \mathrm{e}^{-r/\lambda}\,\mathrm{d}r}{\int \mathrm{e}^{-r/\lambda}\,\mathrm{d}r} = 2\lambda^2.$$

Im Falle isotroper Streuung erhält man nach n Zusammenstößen

$$\overline{R^2} = n\,\overline{r^2} = 2\left(\frac{1}{\xi}\ln\frac{E_0}{E}\right)\lambda^2. \tag{7.8}$$

Im Laboratoriumssystem ist die Streuung, wie im Kap. 5.1. gezeigt wurde, nicht isotrop, sondern verläuft bevorzugt nach vorwärts. Das hat zur Folge, daß die mittlere Entfernung des Neutrons vom Ausgangspunkt bis zum Punkt des Zusammenstoßes, die „Streuweglänge", größer ist als die mittlere freie Weglänge λ. Im Zusammenhang damit wird die Transportweglänge λ_{tr} eingeführt. Die Transportweglänge läßt sich errechnen, wenn man die mittlere Entfernung des Neutrons von der Quelle in bezug auf seine Anfangsrichtung betrachtet (Abb. 33). Als Bestimmungsgrößen sind hierbei die Weglängen r zwischen zwei Zusammenstößen und die Winkel Θ, unter denen die Neutronen jeweils gestreut werden, zu wählen.

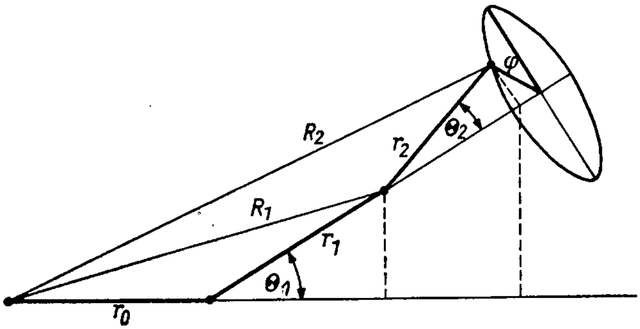


Abb. 33. Zur Berechnung von λ_{tr} und $\overline{R^2}$ für Neutronen

Wenn das erste Wegstück bis zum ersten Zusammenstoß r_0 ist, dann wird das Wegstück nach dem ersten Zusammenstoß $r_1 \cos\Theta_1$. Ist Θ_2 der Winkel, unter dem das Neutron nach Zurücklegen der Wegstrecke r_1 gestreut wird, so ergibt sich für die Projektion auf die Richtung r_0 nach Durchlaufen der Wegstrecke r_2 der Ausdruck $r_2 \cos\Theta_1 \cos\Theta_2$, und man erhält für die gesamte Entfernung des Neutrons in der Richtung von r_0 (s. Anhang III)

$$r = r_0 + r_1\cos\Theta_1 + r_2\cos\Theta_1\cos\Theta_2 + r_3\cos\Theta_1\cos\Theta_2\cos\Theta_3 + \cdots.$$

Durch Mittelung der Reihe über eine große Anzahl von Wegstrecken r_i erhält man die Transportweglänge:

$$\lambda_{tr} = \bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{r}_1\,\overline{\cos\Theta_1} + \bar{r}_2\,\overline{\cos\Theta_1}\;\overline{\cos\Theta_2} + \cdots.$$

Da die Mittelwerte $\overline{\cos\Theta_1} = \overline{\cos\Theta_2} = \overline{\cos\Theta_3} = \cdots = \overline{\cos\Theta}$ sind, erhält man für die Transportweglänge

$$\lambda_{tr} = \lambda\left[1 + \overline{\cos\Theta} + (\overline{\cos\Theta})^2 + (\overline{\cos\Theta})^3 + \cdots\right] = \frac{\lambda}{1 - \overline{\cos\Theta}}. \tag{7.9}$$

Wenn die Streuung kugelsymmetrisch (isotrop) im Laboratoriumssystem wäre, würde $\overline{\cos\Theta} = 0$ sein.

Zur weiteren Errechnung der Transportweglänge muß man den Zusammenhang von $\overline{\cos\Theta}$ mit anderen charakteristischen Größen, in diesem Falle isotroper Streuung im Schwerpunktsystem mit den Massen der Stoßpartner, finden: So ist in der Gleichung

$$\overline{\cos\Theta} = \int_0^\pi \cos\Theta\, f(\Theta)\, \mathrm{d}\Theta$$

$f(\Theta)$ die Funktion für die Winkelverteilung im Laborsystem. Im Schwerpunktsystem gilt bei isotroper Streuung die Beziehung

$$f(\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{2} \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta .$$

Man erhält dann

$$\overline{\cos\Theta} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos\Theta \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta .$$

Für den Zusammenhang der Winkel Θ und ϑ in den beiden Koordinatensystemen gilt die Beziehung (Gl. 7.2)

$$\cos\Theta = \frac{1 + A\cos\vartheta}{\sqrt{1 + A^2 + 2A\cos\vartheta}} .$$

Demzufolge ist

$$\overline{\cos\Theta} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1 + A\cos\vartheta}{\sqrt{1 + A^2 2A\cos\vartheta}} \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta = \frac{2}{3}\,\frac{1}{A}$$

und

$$\lambda_{\mathrm{tr}} = \frac{\lambda}{1 - \frac{2}{3} A} . \tag{7.10}$$

Für $\overline{R^2}$ im Laboratoriumssystem ergibt sich nach etwas umständlichen statistischen Betrachtungen (s. Anhang)

$$\overline{R^2} = \frac{2}{\left(1 - \frac{2}{3A}\right) \xi} \int_E^{E_0} \lambda^2(E) \frac{\mathrm{d}E}{E} . \tag{7.11}$$

Wenn λ von der Energie unabhängig ist, ergibt sich

$$\overline{R^2} = \frac{6\lambda^2}{\left(3 - \frac{2}{A}\right) \xi} \ln \frac{E_0}{E} . \tag{7.12}$$

Für die Streuung von Neutronen an Protonen, also $\xi = 1$ und $A = 1$, folgt $\overline{R_{\mathrm{p}}^2} = 6\lambda^2 \ln \frac{E_0}{E}$. Die Größe $L = \sqrt{\frac{\overline{R^2}}{6}}$ nennt man Bremslänge. Für massen-

gleiche Kernpartner sind diese Beziehungen jedoch sehr ungenau. Die exaktere Rechnung liefert wesentlich kompliziertere Beziehungen.

Die Theorie der Bremsung und der Diffusion von Neutronen hat erhebliche Bedeutung für den Bau und die Funktionsweise von Kernreaktoren. Die hier durchgeführten Rechnungen ergeben einen guten qualitativen Überblick bezüglich der Abbremsung von Neutronen, sie sind jedoch nicht genau. Die Voraussetzungen, die den vorliegenden Rechnungen zugrunde liegen, daß nämlich die Energieverluste beim Zusammenstoß alle dem mittleren Energieverlust pro Stoß gleich sind und daß die Zahl der Zusammenstöße groß ist, treffen für die leichten Bremsmaterialien sicherlich nur angenähert zu. Die weiteren Rechnungen zur Diffusion von Neutronen führen, wiederum vor allem bei leichten Elementen, zu erheblichen Komplikationen, weil die Energieverluste pro Stoß nicht klein gegenüber der Teilchenenergie sind, die mittlere freie Weglänge von der Teilchenenergie abhängig ist, die Zahl der Zusammenstöße bis zum Erreichen der Endenergie nicht groß ist, Absorptions- und unelastische Verluste eintreten können.

7.3. Nachweis und Meßmethoden

Zur Messung von Neutronenintensitäten und -energien sind drei Gruppen von Methoden in Verwendung.

Die Messung kann an Produkten von Kernreaktionen erfolgen, z. B. $^{10}B\,(n, \alpha)\,^{7}Li$ mit $Q = 2{,}8$ MeV, $^{6}Li\,(n, \alpha)\,^{3}H$ mit $Q = 4{,}85$ MeV und $^{3}He\,(n, p)\,^{3}H$ mit $Q = 0{,}774$ MeV. Für den Nachweis von Neutronen sind die ersten beiden Reaktionen sehr gut geeignet, die Energiemessung ist jedoch problematisch, denn 1. muß der Wirkungsquerschnitt der Reaktionen, insbesondere seine Energieabhängigkeit, gut bekannt sein, und 2. sind beide Ausgangsprodukte schwierig in ihrer Verwendung. Das gasförmige BF_3 ist gelegentlich zur Spektrometrie von Neutronen verwendet worden, doch ist, besonders wenn es als reines „Elektronengas" verwendet werden soll, seine geringe Haltbarkeit im hierzu notwendigen, höchst gereinigten Zustand von Nachteil. ^{3}He, mit dem sich bei einem heute erträglichen Preis leicht Ionisationskammern mit hohem Druck herstellen lassen, ist ein zur Spektrometrie von Neutronen gut geeignetes Element.

Zum Nachweis von Neutronen ist die Spaltung, d. h. die Messung der Ionisation durch die Spaltprodukte, gut geeignet, da bei der Spaltung Bruchstücke mit einer Gesamtenergie von 150—170 MeV auftreten. Damit die schweren Spaltprodukte zur Wirkung kommen, bedarf es aber dünner Schichten des spaltfähigen Materials, so daß die Ausbeuten klein sind. Kammern mit zahlreichen, kaskadenartig hintereinandergeschalteten Uranschichten sind in Verwendung. Die Unterdrückung der α-Strahlen des Spaltmaterials bedeutet eine nicht unbedeutende Erschwerung bei der Verwendung dieser Methode.

Schließlich ist die Methode der Schwellenwert-Detektoren zu erwähnen. Hierbei handelt es sich um β-aktive Körper, die durch eine Reaktion mit Neutronen als angeregtes Folgeprodukt entstehen. Die Intensität der β-Aktivität dieser Folgeprodukte wird gemessen und daraus auf die Intensität der Neutronen geschlossen.

Von Interesse ist es, daß im Lauf der Jahre viele derartige Reaktionen untersucht worden sind, die nur mit Neutronen oberhalb einer gewissen Schwellenenergie erzeugt werden können. Als Beispiel sei die Reaktion $^{32}S(n, p)^{32}P^*$ genannt, die erst bei einer Neutronenenergie oberhalb von etwa 0,95 MeV einsetzt und bei der $^{32}P^*$ die gut meßbare Halbwertszeit von 14,3 Tagen besitzt. Durch Kombination mehrerer derartiger Indikatoren läßt sich ein Neutronenspektrum, freilich in reichlich grober Weise, abtasten. Diese Methode wird u. a. zur Ermittlung der Neutronenspektren in verschiedenen Zonen von Kernreaktoren verwendet. In diesem Falle würden umfangreichere Meßinstrumente die Funktion des Reaktors erheblich stören. Eine viel benutzte Methode zur Messung von Neutronenspektren ist die, die Ionisierung durch einen elastisch gestreuten Rückstoßkern zu ermitteln. Hierfür ist Wasserstoff besonders geeignet, da bis zu Protonenenergien von mehr als 10 MeV isotrope Streuung (S-Streuung) erfolgt. Wie die Gleichungen (7.1) und (7.2a) zeigen, ist die Verteilung $\mathrm{d}w/\mathrm{d}E$ der Rückstoßprotonen für die Neutronen einer konstanten Energie E_0 durch eine Parallele zur Abszisse gegeben, deren Bereich sich von $\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_0$ bis E_0 erstreckt. Für den Zusammenstoß mit Protonen ($A = 1$) erhält man demnach ein Rückstoßspektrum, das sich von $E_p = 0$ bis $E_p = E_0$ erstreckt. Für ein Linienspektrum von Neutronen der Energie E_0 erhält man daher beispielsweise in einer Ionisationskammer, die mit Wasserstoff gefüllt ist, oder in einem organischen Szintillator Teilchenimpulse, die sich mit konstanter Anzahl über den Bereich von $E_p = 0$ bis $E_p = E_0$ erstrecken.

Komplizierter wird es, wenn ein nichtmonochromatisches Neutronenspektrum mit Hilfe der Rückstoßmethode auszumessen ist. Wie Gl. (7.2a) zeigt, ist die Zahl der Rückstoßatome gegeben durch $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}E} = \frac{1}{E_0}\,\sigma(\varphi)$. Aus den Gleichungen (7.2ff.) ersieht man, daß $\frac{\mathrm{d}E}{E_0} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\,(\cos\varphi)$ ist. Aus beiden Beziehungen erhält man: $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}(\cos\varphi)} \approx \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}E} \approx \sigma(\varphi)$. Hieraus ist ersichtlich, daß die Isotropie der Streuung im Schwerpunktsystem (φ = Winkel im S-System) durch Messung der Energieverteilung der Rückstoßteilchen im Laboratoriumssystem ermittelt werden kann, naturgemäß nur für leichte Gase, z. B. He.

Gehen wir zu einem Neutronenspektrum über, so kann man $\mathrm{d}w$ ersetzen durch $\mathrm{d}N(\mathrm{p})$, wobei $N(\mathrm{p})$ = Protonenspektrum. Es ergibt sich dann, unter Zusammenfassung der Konstanten in der Größe C:

$$\frac{\mathrm{d}N(\mathrm{p})}{\mathrm{d}E} = \frac{C}{E_0}\,N(n_0).$$

Man erhält also durch Differentiation des gemessenen Spektrums der Rückstoßteilchen das Neutronenspektrum: $N(n) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\,N(\mathrm{p})\,\frac{E}{C}$. Der experimentelle Aufwand zur Ermittlung von Neutronenspektren nach der Rückstoßmethode ist zwar gering, doch bedarf es sorgfältigster Anordnung der Ionisationskammern, um eine Verwaschung der Spektren zu vermeiden (Abb. 32).

Die modernste, hinsichtlich ihrer Meßgenauigkeit derzeit allen anderen überlegene Methode der Ausmessung von Neutronenspektren ist die Flugzeitmethode. Das Prinzip dieses Verfahrens besteht darin, daß der Zeitpunkt für die Emission eines Neutronenimpulses festgelegt wird und nach einer einstellbaren Zeit, in der die Neutronen je nach ihrer Energie eine bestimmte Strecke zurückgelegt haben, der Nachweis der Neutronen erfolgt. Bereits im Jahre 1935 wurde ein Neutronenimpuls auf mechanischem Wege erzielt. Eine Anordnung, wie sie von FERMI 1947 verwendet wurde, zeigt Abb. 34. Ein Stahlzylinder, der eine Bohrung enthält, die mit Schichten aus Aluminium und Cadmium geringer Dicken versehen ist, wird um eine Achse senkrecht zur Zeichenebene in Rotation versetzt. Bereits bei einer

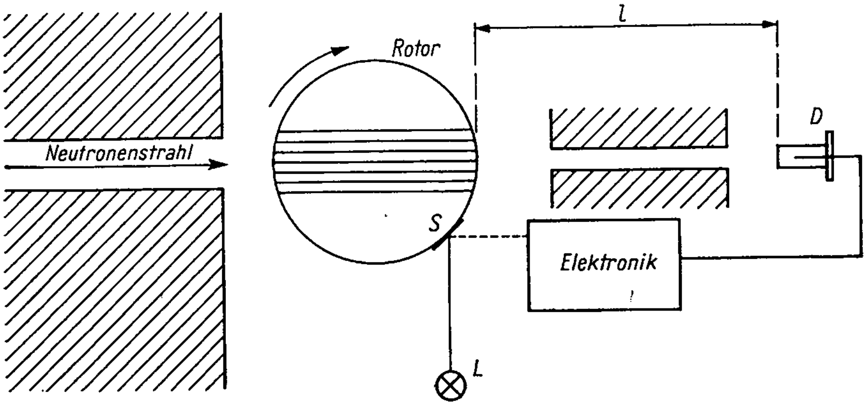


Abb. 34. Schema eines Flugzeitspektrometers für Neutronen (FERMI)

geringen Drehung, etwa um 1,5°, erreichen den Detektor praktisch keine Neutronen mehr. Bei rascher Rotation des Zylinders bis zu etwa 15000 Umdrehungen pro Minute werden den BF_3-Detektor 500mal je Sekunde Impulse von Neutronen aller Energien des emittierenden Strahles erreichen. Die Dauer eines solchen Impulses beträgt $\Delta\tau = \frac{1}{500}\,\frac{3}{180} = 3{,}3 \cdot 10^{-5}$ s. Man erkennt, daß bei einer derartigen Anordnung mit wachsender Flugstrecke l vom Impulsgeber bis zum Detektor D ein Neutronenspektrum längs l immer weiter auseinandergezogen wird in der Weise, daß die langsamen Neutronen gegenüber der Front der schnellsten Neutronen zurückbleiben. Es bedarf demnach noch zweier Anordnungen, um ein gewünschtes Energieintervall von Neutronen auszusieben, eines Detektors, der den Zeitpunkt des Startes für den Impuls angibt, und einer Elektronik, die den Meßdetektor D nach einer gewissen Zeit τ zur Registrierung der ankommenden Neutronen öffnet.

Die Anzeige für den Start des Neutronenimpulses kann auf verschiedene Art erfolgen, beispielsweise durch einen kleinen Spiegel S außen am Rotor, der im Moment der Emission des Impulses den von L kommenden Lichtstrahl auf einen SEV reflektiert, so daß dieser einen elektrischen Impuls an die elektronische

Apparatur überträgt. Eine Anordnung mit variabler zeitlicher Verzögerung steuert die Öffnung des Detektors, der nur kurzzeitig zur Neutronenzählung bereit ist. Die notwendige Dauer für die Verzögerung errechnet sich zu $\tau = l/v$, wobei v die Geschwindigkeit der zu untersuchenden oder für die weitere Messung benötigten Neutronen ist.

Bei der Erzeugung von Neutronenströmen mit Hilfe von Teilchenbeschleunigern und Kernreaktionen wird das Signal des startenden Impulses auf andere Weise erzielt. Einmal läßt sich dieser Startimpuls direkt aus der elektromagnetischen Anordnung, die den Ionenimpuls erzeugt, entnehmen. Zum anderen kann bei manchen Reaktionen, z. B. $^3H(d, n)^4He$ das gleichzeitig mit dem Neutron entstehende α-Teilchen zur Anzeige des Startmomentes für den Neutronenimpuls verwendet werden (Methode der assoziierten Teilchen).

Es ist nun von Interesse, die Bedingungen zu betrachten, die für den Energiebereich der zur Messung gelangenden Neutronen maßgebend sind. Cadmium absorbiert Neutronen mit Energien unterhalb von etwa 0,3 eV mit einem Absorptionsquerschnitt >1000 Barn. Dieser Querschnitt sinkt rasch mit wachsender Energie und erreicht bei 1 eV etwa 23 Barn, bei 7 eV nur noch 5 Barn. Für höhere Ansprüche an Meßgenauigkeit kann man somit den beschriebenen Impulsgeber nur für Neutronen unterhalb der Energie von 0,3 eV verwenden. Das entspricht einer maximalen Geschwindigkeit von $v = 7{,}5 \cdot 10^5$ cm/s. Andererseits ist die Mindestenergie der Neutronen dadurch bestimmt, daß diese imstande sein müssen, den Zylinderdurchmesser von 4 cm noch zu durchsetzen, während die Spalten den Weg zum Detektor frei lassen. Die minimale Geschwindigkeit errechnet sich demnach zu $v_{\min} = \dfrac{4}{3{,}3 \cdot 10^{-5}} = 1{,}2 \cdot 10^5$ cm/s, was einer Energie von $7{,}5 \cdot 10^{-3}$ eV entspricht. Die Länge der Strecke l, die Dauer des Impulses und die Dauer für die Öffnung des Detektors lassen, neben einigen Einflüssen seitens der Elektronik, die Genauigkeit der Messung, also das Auflösungsvermögen für die Neutronenenergie errechnen, worauf hier nicht eingegangen wird. Diese Abschätzungen lassen erkennen, daß derartige Anordnungen nur für geringe Neutronenenergien verwendbar sind. Für höhere Energien muß die Erzeugung der Neutronenimpulse auf andere Art geschehen. Einigermaßen einfach ist die Verwendung eines Zyklotrons, das im Impulsbetrieb arbeitet. An Stelle des mechanischen Impulserzeugers werden die Neutronen erzeugenden Teilchen — z. B. Deuteronen — impulsförmig auf das für die (d, n)-Reaktion verwendete Target (meist Deuterium oder Tritium) geschossen. Diese beiden Reaktionen zur Neutronenerzeugung sind stark exotherm und liefern bereits bei Deuteronenenergien von 1 keV bis wenigstens 100 keV erhebliche Neutronenstrahlen. Für derartig geringe Spannungen sind Linearbeschleuniger, z. B. solche mit Greinacher-Schaltung oder nach van de Graaff, sehr geeignet und können mit geringem Aufwand sowie kleinen Dimensionen unschwer hergestellt werden (sie werden für zahlreiche Zwecke der Medizin, Biologie und Technik industriell gefertigt). Durch Rotation des Deuteronenstrahls über eine Blende lassen sich kurze Deuteronenimpulse erzeugen. Zur Vergrößerung der Deuteronenzahl in einem Impuls sind besondere Anordnungen, dem Klystron-Prinzip der Elektronik verwandt, erdacht worden. Man verwendet hierzu die Koinzidenz zwischen dem innerhalb der notwendigen Zeitintervalle verzögerten

Startimpuls und dem Ionisationsimpuls des Neutronendetektors und zählt die Koinzidenzen. Mit Hilfe einer recht komplizierten elektronischen Anordnung läßt sich dieses Verfahren so weit ausdehnen, daß ein mehr oder weniger umfangreiches System von Verzögerungen eine große Zahl von Intervallen für die Flugzeit der Neutronen vom Erzeugungsort bis zum Detektor zu messen in der Lage ist. Auf diese Weise erhält man ein Spektrum der Neutronenzeiten und damit, da die Flugstrecke bekannt ist, deren Geschwindigkeiten und somit ihre Energien. Abb. 35 zeigt ein auf diese Weise erhaltenes Neutronenspektrum für die unelastische Streuung von Neutronen.

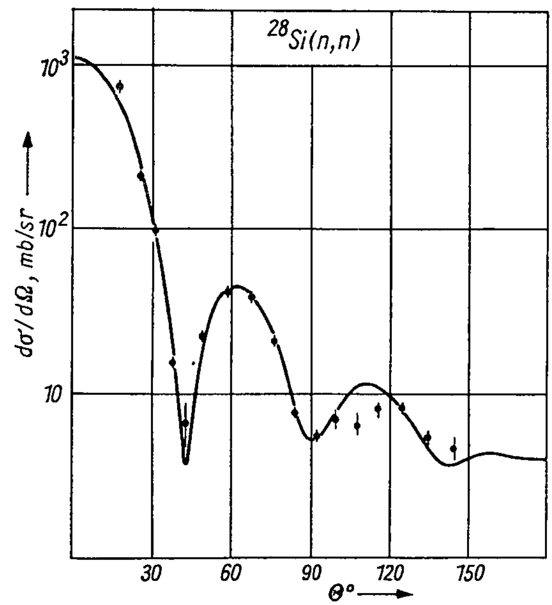


Abb. 35. Neutronenspektrum von ^{28}Si, nach der Flugzeitmethode gemessen (Höhn, Pose, Seeliger). $T_n = 14{,}7$ MeV

Sehr weitgehend erleichtert wurde diese Art der Spektrometrie von Neutronen durch die Entwicklung der elektronischen Anordnungen im Nanosekunden-Bereich. Die Möglichkeit, sehr lange Zeitintervalle mit ausreichender Genauigkeit messen zu können, gestattet eine Verkürzung der Laufstrecken und damit eine Erhöhung der Neutronenintensität. Die 1000 Meter lange Flugstrecke der Neutronen aus dem Impulsreaktor in Dubna gestattet Messungen im Energieintervall von < 1 keV mit einem Auflösungsvermögen von 0,036 µs/m. Andere Apparaturen liefern noch höhere Auflösungsvermögen. So wird z. B. in Oakridge mit dem Van-de-Graaff-Generator unter Verwendung von Neutronen aus der Li(p, n)-Reaktion bei nur 80 cm Flugstrecke im Energiebereich von 1 bis 40 keV eine Auflösung von 0,013 µs/m erzielt. Im Institut des Verfassers wurden Anordnungen entwickelt, die, unter Verwendung von Neutronen aus der Li(d, n)- und der (D,D)-Reaktion, bei Flugstrecken von etwa 2 bis 3 Metern in einem Energieintervall von < 2 MeV bis ≈ 15 MeV ein Auflösungsvermögen von 0,006 µs/m haben.

8. ERHALTUNGSSÄTZE

8.1. Drehimpuls und Parität

Basierend auf den Erhaltungssätzen für Energie und Impuls sind die Gesetze, die beim Zusammenstoß zweier Teilchen auftreten, dargestellt worden. Es seien nun einige weitere Erhaltungssätze angeführt, nämlich die der Erhaltung des Drehimpulses, der Parität und des Isospins, die beim Zustandekommen kernphysikalischer Prozesse erfüllt sein müssen.

Den für die Quantentheorie des Atoms charakteristischen Apparat zur Beschreibung von Spektren hat man — mutatis mutandis — in die Kernphysik weitgehend übernehmen können. Einige Wiederholungen sind im Anhang II dargestellt. Entsprechend dem andersartigen Kraftgesetz zwischen den Bausteinen der Atomkerne im Vergleich zu Elektronen und Kern im Atom, ergeben sich für den Atomkern wesentliche Unterschiede in der rechnerischen Behandlung und den Ergebnissen. Die Wechselwirkung zwischen Elektronen und den Atomkernen wird durch die mechanischen und die Coulomb-Kräfte bewirkt, wobei der Einfluß benachbarter Elektronen auf das zu betrachtende Elektron im allgemeinen durch Störkräfte und die besonders für diesen Fall von Born entwickelte Störungsrechnung zu berücksichtigen ist. Im Atomkern hat man mit wachsendem Abstand sehr rasch abnehmende Wechselwirkungskräfte, für die sogar mit erheblicher Genauigkeit in zahlreichen Fällen ein rechteckiger Potentialverlauf — Potentialmulden — angesetzt werden kann: die Nukleonen eines Kerns befinden sich also quasi in einem Kasten beachtlicher Tiefe.

Drehimpuls

Der Zustand der Nukleonen ist zunächst einmal dadurch charakterisiert, daß sie einen bestimmten Drehimpuls $p_l = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar$ (oder, kurz ausgedrückt, ein l) besitzen, der sich mit dem Spin 1/2 der Nukleonen zum Gesamtdrehimpuls j vektoriell zusammensetzt, also:

$$L = |\sum \boldsymbol{l}_i| \quad \text{und} \quad S = |\boldsymbol{S}_i|, \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}.$$

$\boldsymbol{J}$ ist hierbei eine Erhaltungsgröße.

Parität

Der Zustand eines Teilchens wird in der Quantenmechanik durch eine Wellenfunktion $\Psi(x, y, z)$ beschrieben, die eine Lösung der Wellengleichung, der Schrö-

dinger-Gleichung, darstellt. In der klassischen Mechanik führt die Änderung des Vorzeichens aller kartesischen Koordinaten zu keiner Änderung der Hamilton-Funktion. Das gilt sowohl für ein freies System als auch für ein System, das sich unter dem Einfluß von Zentralkräften befindet. Die Vorzeichenänderung aller Koordinaten bedeutet lediglich den Übergang von einem Rechts- in ein Linkssystem. In der Quantenmechanik gilt für den Operator der Hamilton-Funktion dasselbe, jedoch verhalten sich die Wellenfunktionen und die sie charakterisierenden Eigenwerte anders. Die Wellengleichung von SCHRÖDINGER ist linear, ihre Lösungen können sich daher nur durch Konstanten unterscheiden, z. B.

$$\Psi(x, y, z) = P \cdot \Psi(-x, -y, -z).$$

Da sich das Rechtssystem vom Linkssystem nicht unterscheidet, muß die umgekehrte Transformation denselben Transformationsfaktor enthalten:

$$\Psi(-x, -y, -z) = P \cdot \Psi(x, y, z).$$

Aus beiden Gleichungen erhält man:

$$\Psi(x, y, z) = P^2 \cdot \Psi(x, y, z).$$

Demnach ist $P^2 = 1$, und P kann die Werte ± 1 annehmen.

Den Faktor P bezeichnet man als Parität. Die Parität ist gegeben durch $P = (-1)^l$, wobei l die Quantenzahl des Drehimpulses ist. Die Parität ist bei starken (Kern-)Wechselwirkungen eine Erhaltungsgröße. Für eine Kernreaktion zwischen zwei Teilchen hat der Erhaltungssatz für die Parität folgendes Aussehen:

$$a + A \rightarrow B + b,$$

$$P_a \cdot P_A (-1)^{l_{aA}} = P_B \cdot P_b (-1)^{l_{bB}}.$$

P_a, P_A, P_b und P_B sind die Paritäten der wechselwirkenden bzw. gebildeten Teilchen, l_{aA} und l_{bB} sind entsprechend die Quantenzahlen für die Drehimpulse der Teilchenpaare.

8.2. Isospin

Der Begriff des Isospins ist etwa gleichzeitig von HEISENBERG und von IWANENKO gefunden worden, wobei ersterem die theoretische Fundierung und Ausarbeitung des mathematischen Apparates zu verdanken ist. Der genannte Begriff basiert auf der Gleichheit der Kernkräfte zwischen Proton und Proton einerseits und Neutron und Proton andererseits. Diese Gleichheit folgt aus den experimentellen Ergebnissen der (p—p)-Streuung und der (n—p)-Streuung bei niedrigen Energien und aus den bis auf Korrekturen hinsichtlich elektromagnetischer Wechselwirkungen der Protonen untereinander gleichartigen Bindungsenergien und den Anregungsenergien isobarer Kerne. Wegen der verhältnismäßig geringen elektro-

magnetischen Wechselwirkungen wird dieses Verhalten besonders deutlich bei leichten Isobaren, also ${}^3_1\text{H}$—${}^3_2\text{He}$; ${}^7_3\text{Li}$—${}^7_4\text{Be}$ usw. Andererseits ist bekannt, daß Isobare nur bei einem bestimmten Verhältnis der Anzahlen von Neutronen zu Protonen stabil sind. Bei den Isobaren ${}^3_1\text{H}$ und ${}^3_2\text{He}$ hat der erstgenannte Kern die größere Masse und zerfällt unter β-Emission in ${}^3_2\text{He}$. Von den drei Isobaren der Massenzahl 10 — ${}^{10}_4\text{Be}$, ${}^{10}_5\text{B}$ und ${}^{10}_6\text{C}$ — hat der mittlere die kleinste Masse; die beiden anderen sind radioaktiv:

$$ {}^{10}_4\text{Be} \xrightarrow{e^-} {}^{10}_5\text{B}; \qquad T_{1/2} = 2{,}7 \cdot 10^6\,\text{a}; \qquad E_{\beta^-} = 0{,}555\,\text{MeV}; $$

$$ {}^{10}_6\text{C} \xrightarrow{e^+} {}^{10}_5\text{B}; \qquad T_{1/2} = 19{,}1\,\text{s}; \qquad E_{\beta^+} = 2{,}1\,\text{MeV}. $$

Betrachten wir folgendes Beispiel, das den Einfluß der Coulomb-Kräfte veranschaulichen kann: ${}^3_1\text{H} \xrightarrow{e^-} {}^3_2\text{He}$:

$$ E_\beta = [M_{\text{At}}(A, Z) - M_{\text{At}}(A, Z+1)]\,c^2 = [M_{\text{At}}({}^3_1\text{H}) - M_{\text{At}}({}^3_2\text{He})]\,c^2; $$

$$ \Delta W(A, Z) = [Z \cdot M_{\text{At}}({}^1_1\text{H}) + M_{\text{n}}(A - Z) - M_{\text{At}}(A, Z)]\,c^2. $$

Für das genannte Beispiel ergibt sich hieraus:

$$ \Delta W(3{,}1) = [M_{\text{At}}({}^1_1\text{H}) + 2M_{\text{n}} - \text{M}_{\text{At}}({}^3_1\text{H})]\,c^2; $$

$$ \Delta W(3{,}2) = [2M_{\text{At}}({}^1_1\text{H}) + M_{\text{n}} - M_{\text{At}}({}^3_2\text{He})]\,c^2. $$

Demnach wird

$$ \Delta W(3{,}1) - \Delta W(3{,}2) = \underbrace{\underbrace{[M_{\text{n}} - M_{\text{At}}({}^1_1\text{H})]\,c^2}_{0{,}782\,\text{MeV}} - \underbrace{[M_{\text{At}}({}^3_1H) - M_{\text{At}}({}^3_2\text{He})]\,c^2}_{0{,}019\,\text{MeV}}}_{0{,}763\,\text{MeV}}. $$

Die beim Zerfall von ${}^3_1\text{H}$ freiwerdende Energie des β-Teilchens beträgt aber nur 0,0186 MeV. Bei dem angeführten Zerfallsprozeß wird jedoch der zweifach geladene ${}^3_2\text{He}$-Kern gebildet. Damit der Folgekern stabil ist, muß demnach ein Teil der bei der Umwandlung freiwerdenden Energie für die Coulomb-Abstoßung der beiden Protonen des ${}^3_2\text{He}$ aufgewendet werden. Nimmt man für den Abstand der beiden Protonen $r = 1{,}9$ Fermi an, so erhält man für die Coulomb-Energie etwa 0,76 MeV. Dieser Betrag, der durch die Ungenauigkeit, mit der der Abstand zwischen den beiden Protonen bekannt ist, einigen Spielraum für den Betrag der errechneten Coulomb-Energie läßt, ist der Umwandlungsenergie 0,763 MeV (Summe der Coulomb- und β-Energie) sehr nahe und stellt somit ein gutes Argument für die Annahme der Gleichheit der Kernkräfte zwischen den beiden Nukleonenarten dar. Daraus folgt, daß die Stabilität der Kerne bei verschiedener Zusammensetzung aus Neutronen und Protonen zwar verschieden ist, daß jedoch, wie am obigen Beispiel gezeigt wurde, diese Unterschiede durch Unterschiede der Coulomb-Kräfte zu verstehen sind. Ähnliche Beispiele wie das angeführte lassen sich für eine Reihe von „Spiegelkernen" — $M(A, Z)$ und $M(A, A-Z)$ — finden. Bei den Spiegelkernen ist die Zahl der Protonen mit der Zahl der Neutronen vertauscht (vgl. Abb. 9). Derartige Spiegelkerne zeigen, bei Berücksichtigung der

Coulomb-Energie, nicht nur gleiche Bindungsenergie, sondern es stimmen auch die ersten Niveaus solcher Kerne hinsichtlich Energie, Drehimpuls und Parität überein. Die leichtesten Kerne, ${}^2_1$H, ${}^3_1$H und ${}^3_2$He, besitzen keine Anregungszustände.

Auf Grund des sehr ähnlichen Baues von Protonen und Neutronen sind beide Teilchen als verschiedene Ladungszustände des „Nukleons" aufzufassen. Die Gleichheit des Baues von Protonen und Neutronen läßt sich quantentheoretisch durch die Einführung eines Vektors $\boldsymbol{T}$, des Isospins, beschreiben. $\boldsymbol{T}$ ist für Proton und Neutron gleich und besitzt den Wert 1/2. Der Formalismus des Isospins entspricht weitgehend dem des Spins, der durch Pauli entwickelt wurde. $\boldsymbol{T}$ ist ein Vektor in einem (formalen) dreidimensionalen Ladungsraum oder Isospinraum. Abweichend vom Spinformalismus hat nur eine Komponente des Isospins, T_3, unmittelbare physikalische Bedeutung. Die Projektion T_3 von $\boldsymbol{T}$ mit dem Wert $+1/2$ beschreibt ein Proton, die mit $T_3 = -1/2$ ein Neutron. Die Wechselwirkung zwischen Nukleonen und Atomkernen wird durch den Vektor $\boldsymbol{T}$ bestimmt, hängt also nicht von der Art des Nukleons, d. h. nicht von dem Wert von T_3 ab. Bei Kernwechselwirkungen soll der Isospin eine Erhaltungsgröße sein. Die Multiplizität der Projektionen des Vektors $\boldsymbol{T}$ ist, ähnlich wie beim Spin, durch den Wert $2T + 1$ gegeben.

Betrachten wir zunächst den einfachen Fall der Wechselwirkung zweier Nukleonen. Die (p—p)-Wechselwirkung liefert für $(T_3)_{2p}$ den Wert $+1$. Der Vektor $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2$ kann die Werte 0 und 1 annehmen. Da aber seine Projektion den Wert 1 hat, ist nur $T = 1$ möglich. Die (n—n)-Wechselwirkung wird ebenfalls durch $T = 1$ charakterisiert, jedoch hat die Projektion $(T_3)_{2n}$ den Wert -1. Die (n—p)-Wechselwirkung hat die Komponente $(T_3)_{np} = 0$. Der Vektor $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2$ kann daher die Werte $T = 0$ und $T = 1$ annehmen. Die Analyse zeigt, daß dieses $T = 1$ identisch mit der (n—n)- und (p—p)-Wechselwirkung ist. Der Fall $T = 0$ der (n—p)-Wechselwirkung entspricht demnach dem Deuteron. Bei einem Zwei-Nukleonen-System sind also möglich: drei Zustände mit identischem Kernbau $T = 1$, und demnach $(2T + 1) = 3$, sowie ein Zustand mit $T = 0$, also $(2T + 1) = 1$.

Tabelle 13. Isospin für ein System von zwei Nukleonen

Typ	Z	T_3	T
n—n	0	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$	1
p—p	2	$+\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = +1$	1
n—p	1	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$	0; 1

Nach diesen Betrachtungen ist der Übergang zu komplizierteren Kernen leicht ersichtlich. Die Komponente T_3 ist gegeben durch

$$T_3 = \frac{Z}{2} - \frac{N}{2} = \frac{2Z-A}{2} \quad \text{und} \quad T \geqq \frac{Z-N}{2},$$

wobei $T_{\max} = \frac{A}{2}$ wird. Es hat sich gezeigt, daß bei den leichten Kernen gewöhnlich der Minimalwert von $T = 2Z - A/2$ auftritt. Für die schon betrachteten Kerne ${}^3_2\mathrm{He}$ und ${}^3_1\mathrm{H}$ erhält man: $T_3({}^3_2\mathrm{He}) = (4 - 3)/2 = 1/2$ und $T_3({}^3_1\mathrm{H}) = -1/2$, so daß $2T + 1 = 2$. Es gibt also zwei Zustände, von denen der zweite der Kern ${}^3_1\mathrm{H}$ mit demselben Vektor $|\boldsymbol{T}|\,({}^3_1\mathrm{H}) = 1/2$, aber mit $T_3\,({}^3_1\mathrm{H}) = -1/2$ ist.

Ebenso wie die Kernniveaus durch die bereits weiter oben erwähnten Erhaltungsgrößen zu charakterisieren sind, werden sie weiterhin durch den Isospin als eine Erhaltungsgröße zu kennzeichnen sein. Bei der Behandlung der Elementarteilchen werden wir mit dem Isospin und weiteren Erhaltungsgrößen in Berührung kommen. Aber auch bei Kernprozessen liefert der Isospin Auswahlregeln bzw. Hinweise für deren Möglichkeit oder Unmöglichkeit. Beispielsweise kann ein α-Teilchen, das den Isospin $\boldsymbol{T} = 0$ besitzt, nur dann emittiert werden, wenn Mutter- und Tochterkern gleichgroße Isospins besitzen. Es ist zu beachten, daß die durch den Isospin gegebenen Beziehungen nur mit einer Genauigkeit bis zur elektromagnetischen Wechselwirkung gelten. Sie sind daher besonders bei leichten Kernen, bei denen elektrische Wechselwirkungen schwach sind, besonders ausgeprägt.

Es sei kurz zusammengefaßt, welche Erhaltungssätze für Kernprozesse gelten:

1. Mechanische Erhaltungssätze, Energie und Impuls;
2. Erhaltung des Bahndrehimpulses;
3. Zahl der Nukleonen (Baryonenzahl);
4. Elektrische Ladung;
5. Parität;
6. Isospin.

In der Kernphysik niederer Energien zwar weniger hervortretend, wäre die Invarianz der Raum-Zeit-Drehung (Lorentz-Transformation) und die aus der relativistischen Beziehung $E^2 = M^2c^4 + p^2c^2$ folgende Invarianz der Ruhmasse M zu erwähnen. Für Elementarteilchen werden noch weitere Erhaltungsgrößen zu berücksichtigen sein.

Beschäftigen wir uns weiter, wie schon für den Isospin, mit der Klassifikation möglicher Zustände, im einfachsten Fall für das System von 2 Nukleonen. Der Zustand ist charakterisiert durch die Quantenzahl L des Bahndrehimpulses und die Quantenzahl S des Spins. Wenn keine Kopplung zwischen dem Spin und den Koordinaten vorhanden ist, so sind Bahndrehimpuls und Spin selbst Erhaltungsgrößen. Existiert eine Spin-Bahn-Kopplung, so sind nicht die Vektoren $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{S}$ Erhaltungsgrößen, sondern das Gesamtmoment $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$. Ebenso wie in der Atomhülle werden die Werte des Bahndrehimpulses mit den Buchstaben S, P, D, ... bezeichnet. Für 2 Nukleonen kann der Gesamtspin die Werte 0 — antiparallel gerichtete Spins — oder 1 — parallel gerichtete Spins — haben. Den erstgenannten Zustand bezeichnet man als Singulettzustand, d. h., für jeden L-Wert gibt es nur einen J-Wert, $J = L$. Für parallele Spins, $\sum S_i = 1$, erhält man die Werte $J = L + 1$, $J = L$ und $J = L - 1$, also ein Triplett. Entsprechend be-

zeichnet man die Konfigurationen als Singulett- und als Triplettzustände. Bei der Bezeichnung der Zustände eines Systems schreibt man den L-Wert als geraden Großbuchstaben: S für $L = 0$, P für $L = 1$, D für $L = 2$ usw.; die Angabe der Multiplizität wird als hochgestellter Index vor den L-Wert gesetzt; der J-Wert folgt als tiefgestellter Index nach, z. B. $^3P_1$. Für antiparallele Spins erhalten wir die Singuletterme $^1S_0$, $^1P_1$, $^1D_2$ usw., für parallele Spins die in Tabelle 14 verzeichneten Tripletts.

Tabelle 14. System von 2 Nukleonen

	$^3P_0$	$^3D_1$	$^3F_2$	usw.
$^3S_1$	$^3P_1$	$^3D_2$	$^3F_3$	usw.
	$^3P_2$	$^3D_3$	$^3F_4$	usw.

$^3S_1$ heißt auch Triplettzustand, obwohl für $L = 0$ nur ein Zustand möglich ist.

Wie weiter oben ausgeführt wurde, wird die Parität durch die Quantenzahl L bestimmt: $P = (-1)^L$. Die Zustände S, D, G, ... haben die Parität $+1$, die Zustände P, F, H, ... die Parität $P = -1$. Tabelle 15a zeigt einige der Zustände des Systems Neutron + Proton. Man erkennt, daß gleiche J und gleiche Parität

Tabelle 15a. Neutron-Proton

L-Wert	Singulett, $S = 0$	Triplett, $S = 1$
0	$J = 0$; $^1S_0$	$J = 1$; $^3S_1$
1	$J = 1$; $^1P_1$	$J = 2$; $^3P_2 \cdot J = 1$, $^3P_1 \cdot J = 0$, $^3P_0$
2	$J = 2$; $^1D_2$	$J = 3$; $^3D_3 \cdot J = 2$, $^3D_2 \cdot J = 1$, $^3D_1$
3	$J = 3$; $^1F_3$	$J = 4$; $^3F_4 \cdot J = 3$, $^3F_3 \cdot J = 2$, $^3F_2$

Ordnung nach J-Werten

J	Singulett $P = 1$	$P = -1$	Triplett $P = 1$	$P = -1$
0	$^1S_0$			$^3P_0$
1		$^1P_1$	$^3S_1$ $^3D_1$	$^3P_1$
2	$^1D_2$		$^3D_2$	$^3P_2$ $^3F_2$
3		$^1F_3$	$^3D_3$ $^3G_3$	$^3F_3$

Tabelle 15b. Proton-Proton

Pauli-Prinzip: Ungerades L, also $P = -1$, antisymmetrisch. $S = 1$, Triplett; Gerades L, also $P = 1$, symmetrisch. $S = 0$, Singulett.

			Andere Schreibweise	
$J = 0$	$^1S_0$	$^3P_0$	(0^+) $^1S_0$	(0) $^3P_0$
$J = 1$	$^3P_1$		(1^-) $^3P_1$	
$J = 2$	$^1D_2$	$^3P_2$ $^3F_2$	(2^+) $^1D_2$ (2^+) $(^3P_2$ $^3F_2)$	
$J = 3$	$^3F_3$ $^3H_3$		(3^-) $(^3F_3$ $^3H_3)$	

für jeweils zwei Triplettzustände (außer $^3P_0$) möglich sind. Derartige Zustände kombinieren miteinander, d. h., der reale Zustand ergibt sich aus der Superposition zweier Zustände, z. B. $^3P_2 + {}^3F_2$.

Für identische Teilchen, wobei für 2 Nukleonen praktisch nur der Zustand (p—p) in Frage kommt (Tabelle 15b), liefert das verallgemeinerte Pauli-Prinzip eine Auswahlregel, die zum „Verbot" für etwa die Hälfte der in der Tabelle für das System (n—p) verzeichneten Werte führt: Die Wellenfunktion eines Systems, das aus zwei identischen Teilchen mit halbzahligen Spinwerten besteht, soll bei der Umstellung aller Koordinaten und der Richtungen der Spins der Teilchen ihr Vorzeichen ändern, also antisymmetrisch sein.

Die Symmetrieeigenschaften der Wellenfunktionen werden durch die Parität charakterisiert, die für einzelne Teilchen den Wert $(-1)^l$ hat. Das heißt, für derartige Teilchen ist die Wellenfunktion bei der Umstellung aller Koordinaten im Falle geradzahliger l symmetrisch, bei ungeradzahligen l antisymmetrisch. Das verallgemeinerte Pauli-Prinzip läßt sich für eine beliebige Anzahl von Nukleonen (Spin $= 1/2$) mit Hilfe des Isospins darstellen. Für alle Kombinationen von Nukleonen soll die verallgemeinerte Wellenfunktion antisymmetrisch sein, d. h., bei der Umstellung der Koordinaten von l, der Spins s und des Isospins T soll sich deren Vorzeichen ändern. Für ein aus zwei gleichen Nukleonen bestehendes System, (n—n), (p—p), im Zustande mit antiparallelen Spins $s = 0$, $l = 0$ und $T = 1$ ergibt sich folgendes Schema: $(-1)^{l+s+T} = -1$. Hingegen kann im System (n—p) s die Werte $+1$ und 0 annehmen. Dadurch ergibt sich mit $l = 0$ und $T = 1$ für die Parität das Wertepaar $+1$ und -1. Tabelle 16 zeigt die Zu-

Tabelle 16. Identische Teilchen (n—n) und (p—p)

Für $L = 0$; $S = 0$; $T = 1$ folgt

$$\Psi_L \to \Psi_L; \quad \Psi_S \to -\Psi_S; \quad \Psi_T \to \Psi_T.$$

Hiernach ergeben sich für Nukleon-Nukleon-Zustände folgende Kombinationen:

1. $L = 0$; $S = 0$; $T = 1$
   $(-1)^{0+0+1} = -1$ $\quad$ $^1S_0$ für (p—p) und (n—p)
2. $L = 0$; $S = 1$; $T = 1$
   $(-1)^{0+1+1} = +1$ $\quad$ $^3S_1$ nur für (n—p)
3. $L = 1$; $S = 0$; $T = 1$
   $(-1)^{1+0+1} = +1$ $\quad$ $^1P_1$ nur für (n—p)
4. $L = 1$; $S = 1$; $T = 1$
   $(-1)^{1+1+1} = -1$ $\quad$ $^3P_2$ für (p—p) und (n—p)

stände für Nukleon-Nukleon-Kombinationen. Für identische Teilchen ist die Wellenfunktion Ψ_l bei geradzahligen l symmetrisch. Zwei identische Teilchen müssen entgegengesetzte Spinrichtungen aufweisen. Bei ungeradem l ist Ψ_l antisymmetrisch, also muß die Spin-Funktion Ψ_s symmetrisch sein.

8.3. Kernpotential

Aus den früher angeführten Daten sind bereits einige Eigenschaften von Kernkräften bekannt. Aus der Streuung von Teilchen an Kernen, der Rutherford-Streuung, kennt man die Grenzen, innerhalb derer lediglich Coulomb-Kräfte zwischen Teilchen und Kern wirken. Aus der beobachteten Abweichung von der Coulomb-Streuung läßt sich der Wirkungsradius der Kernkräfte und damit die Größe der Kernkräfte abschätzen. Die Zusammensetzung der Kerne aus Proton und Neutron, wobei insbesondere der einfachste zusammengesetzte Kern, das Deuteron, zu erwähnen ist, führt zu anziehenden Kräften zwischen Neutron und Proton. Die annähernde Konstanz der Bindung eines Nukleons an den Kern, die sich über das gesamte periodische System (mit Ausnahme der leichtesten Kerne) erstreckt, zeigt eine Absättigung der Kernkräfte an. Diese folgt auch aus der Proportionalität des Kernvolumens zur Nukleonenzahl, d. h. aus der Konstanz der Dichte der Kernmaterie. Weiterhin gehören zu den Kernkräften die Spinkräfte. Nichtzentrale Anteile dieser Kräfte äußern sich durch das Auftreten von elektrischen Quadrupol- und Multipolmomenten. Die Natur der Kernkräfte ist daher, z. B. im Vergleich zu den Coulomb-Kräften, die zu wesentlichen Anteilen das Verhalten der Elektronen in der Atomhülle und damit die Gesamtheit der optischen Erscheinungen bestimmen, wesentlich komplizierter. Eine abgeschlossene Theorie der Kernkräfte existiert bisher nicht. Der Weg der theoretischen Forschung ist der, daß bestimmte Wechselwirkungspotentiale zwischen den Nukleonen angenommen werden, ihre theoretischen Folgen ausgearbeitet und mit den Ergebnissen der Experimente verglichen werden. Auf Grund der Abweichungen zwischen beiden wird die Theorie durch zusätzliche Annahmen modifiziert, wieder mit der Erfahrung verglichen und so sukzessive an die Realität angenähert. Schwierig wird diese Aufgabe durch den komplizierten mathematischen Apparat, der zur Behandlung der Wechselwirkung zahlreicher Nukleonen untereinander, also zur Lösung von Mehr- oder Vielkörper-Aufgaben, erforderlich ist. Die Rechenmaschinen bedeuten für den Physiker eine wesentliche Erleichterung für die Lösung der genannten Probleme.

Die einfachsten Wechselwirkungen zwischen zwei Atomkernen, die Auskunft über die Kernkräfte geben können, sind die zwischen zwei Nukleonen, also (n—p) und (p—p). Nicht realisierbar sind (n—n)-Wechselwirkungen zwischen freien Neutronen. Die (n—p)-Wechselwirkung ist frei von Coulomb-Kräften, sie sei daher zunächst betrachtet, ebenso wie der gebundene Zustand, das Deuteron. Die Existenz des Deuterons, in dem ein Neutron und ein Proton mit einer Energie von 2,23 MeV zusammengehalten werden, beweist, daß die Kernkräfte groß sind und zu wesentlichen Teilen auf anziehender Wirkung beruhen. Dieser Bindungsenergie entspricht jedoch nicht eine gleichgroße potentielle Energie des Kerns, wie das in der klassischen Mechanik der Fall ist. Entsprechend den Gesetzen der Quantenmechanik tritt für Mikroteilchen bei geringen Abständen die Heisenbergsche Unschärferelation $\Delta p \, \Delta r \approx \hbar$ in Kraft, und der relative Impuls der Teilchen nimmt erhebliche Beträge an. Wenn der Radius des Potentialwalls, also der Kernradius, Δr ist, besitzt ein Teilchen, das sich in der Potentialmulde befindet, den

Impuls $\Delta p \approx \hbar/\Delta r$ und, mit $\Delta r = 1{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm, $\hbar = 6{,}6 \cdot 10^{-16}$ eVs sowie $\mu = \frac{M_N}{2} = \frac{9{,}3 \cdot 10^{-8}}{2c^2}$ eV, die kinetische Energie

$$T = \frac{(\Delta p)^2}{2\mu} = \frac{\hbar^2}{2\mu(\Delta r)^2} \approx 20\,\text{MeV}.$$

Wie man sieht, übersteigt dieser Betrag den der Bindungsenergie der beiden Nukleonen im Deuteron fast um den Faktor 10. Damit die beiden Nukleonen in der Potentialmulde verbleiben können, muß deren Tiefe den oben errechneten Wert für die kinetische Energie der Nukleonen überschreiten. Nur so sind gebundene Zustände der beiden Nukleonen möglich. Es zeigt sich, daß die Tiefe der Potentialmulde und ihre Breite, d. h. der Kernradius R, durch die obenstehende Beziehung zusammenhängen. Für zahlreiche Betrachtungen spielt die Form des Potentials keine große Rolle, vorausgesetzt, daß es mit wachsendem Abstand sehr rasch abnimmt. Erst für verfeinerte Modelle muß der Potentialverlauf am Rande der Mulde genauer festgelegt werden. Wir wählen daher zunächst eine Potentialmulde mit rechteckiger Form. Für diese ergibt sich die kinetische Energie der Nukleonen zu $T = \frac{\pi^2}{8} \frac{\hbar^2}{\mu R^2}$. Das Zustandekommen dieser Größe läßt sich anschaulich etwa folgendermaßen vorstellen. Innerhalb der Potentialmulde bildet sich eine stehende Welle, die der De-Broglie-Wellenlänge der Nukleonen zugeordnet ist:

$$2R = \frac{\lambda}{2} = \pi\bar{\lambda}.$$

Mit $\bar{\lambda} = \hbar/P$ erhält man

$$2R = \frac{\pi\hbar}{p} = \frac{\pi\hbar}{\sqrt{2\mu T}}$$

und damit

$$T = \frac{\pi^2\hbar^2}{8\mu R^2}.$$

Für ein gebundenes System muß daher

$$R^2 V > \frac{\pi^2\hbar^2}{8\mu}$$

werden. Als Zahlenwert ergibt sich

$$R^2 V > 10^{-24}\,\text{MeV cm}^2.$$

Tiefe und Breite der Potentialmulde sind durch die vorstehende Beziehung verbunden. Wenn die Tiefe der Potentialmulde größer als die kinetische Energie der Nukleonen ist, kann der betreffende Kern ein oder mehrere Niveaus besitzen. Die Energie dieser Niveaus wächst mit zunehmender Tiefe der Potentialmulde, bleibt jedoch immer geringer als der Betrag dieses Potentials. Zur Ermittlung der

Wechselwirkungsenergie zwischen den Nukleonen eines Kerns benötigt man als Bestimmungsstücke den Radius R und die Bindungsenergie zwischen den Nukleonen. Für das Deuteron ist die Bindungsenergie aus dem Kernphotoeffekt bekannt. Den Radius R kann man aus der Streuung von Nukleonen an Protonen ermitteln, die weiter unten betrachtet wird.

Fassen wir kurz zusammen, welche Erscheinungen durch eine Theorie der Kernkräfte zu klären sind. In erster Linie ist das die Absättigung der Kernkräfte. Das bedeutet, daß die Dichte der Kernmaterie unabhängig von der Zahl der Nukleonen im Kern ist und demnach der Kernradius proportional $A^{1/3}$ wächst. Weiterhin ist der Betrag der Bindungsenergie für ein Nukleon bei allen Kernen, außer den leichtesten, annähernd konstant und besitzt ein Maximum um $A = 50$ (Abb. 1). Ein ähnliches Verhalten ist bei Flüssigkeiten und festen Körpern bekannt. Hier haben wir kurzreichende abstoßende und weitreichende anziehende Kräfte. Für Kerne kann jedoch die Existenz kurzreichender abstoßender Kräfte nicht angenommen werden (wenn man von Erscheinungen der Wechselwirkung sehr hochenergetischer Nukleonen mit Kernen absieht). Die weitere Vervollständigung der Kenntnisse über Kernkräfte werden wir im folgenden Text, nach eingehender Behandlung der Wechselwirkung von Nukleonen miteinander und der Bildung neuer Teilchen bei hohen Wechselwirkungsenergien, erhalten.

9. NUKLEON-NUKLEON-WECHSELWIRKUNG

9.1. Einführende Betrachtungen

Bei den früheren Betrachtungen der Streuung von Teilchen unter der Wirkung elektrischer Kräfte wurde der Stoßparameter als eine für die Wechselwirkung wichtige Größe eingeführt. Im Falle der Rutherford-Streuung ergab sich ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen dem Streuwinkel φ, dem Stoßparameter b und dem minimal möglichen Abstand ϱ des Teilchens gegebener Energie vom Streuzentrum (Zentraler Stoß, Kap. 5.1)

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\varrho}{2b}.$$

Der Minimalabstand ist bei Coulomb-Kräften

$$\varrho = \frac{zZe^2}{mv^2/2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen im Abstand b bis $b + \mathrm{d}b$ am Streuzentrum vorbeifliegt, ist proportional der Fläche des Kreisrings $2\pi b\,\mathrm{d}b$. Der Drehimpuls des Teilchens für den genannten Stoßprozeß ist $mvb = pb$. In der Quantentheorie kann der Drehimpuls nicht beliebige Werte annehmen, sondern nur ganzzahlige Vielfache von $\hbar$:

$$pb = l\frac{h}{2\pi} = l\hbar$$

(korrekter ist der Drehimpuls $pb = |\boldsymbol{l}| = \hbar\sqrt{l(l+1)} \approx l\hbar$. An die Stelle von $2\pi b\,\mathrm{d}b$ wird daher folgende Größe treten:

$$\pi(b_2^2 - b_1^2) = \frac{\pi h^2}{4\pi^2 m^2 v^2}\,[(l-1)^2 - l^2]$$

und damit

$$q_l = (2l+1)\frac{\lambda^2}{4\pi} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{h}{mv}$$

(Abb. 36).

Für die weitreichenden Coulomb-Kräfte kann der Stoßparameter erhebliche Werte annehmen. Das ist bei den kurzreichenden Kernkräften nicht der Fall. Wird

$b > a$ (a = Wirkungsradius der Kernkräfte), so kann eine Wechselwirkung zwischen den Stoßpartnern nicht mehr stattfinden. Dies kann erst für $b < a$ eintreten. In Abhängigkeit vom Impuls (von der Energie) des anfliegenden Teilchens wird daher nur eine begrenzte Anzahl von Werten des Drehimpulses, und damit von l-Werten, möglich sein.

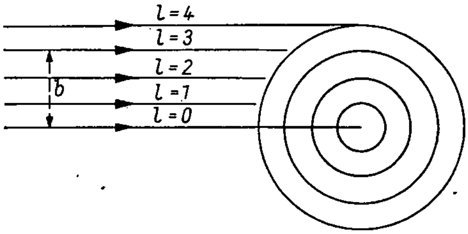


Abb. 36. Stoßparameter nach der Quantentheorie

Zur Veranschaulichung dieses Verhaltens sei ein Zahlenbeispiel für zwei Nukleonen bei der Streuung mit verschiedenen Energiewerten angeführt:

$$b = a \approx 2 \cdot 10^{-13}\,\text{cm}; \qquad p = \sqrt{2mE}; \qquad \hbar = 6{,}58 \cdot 10^{-16}\,\text{eVs}.$$

Aus $pb = l\hbar$ ergibt sich mit diesen Daten:

$$l = \frac{pb}{\hbar} = \frac{2 \cdot 10^{-13} \sqrt{9{,}38 \cdot 10^{6}} \sqrt{E}}{6{,}58 \cdot 10^{-16} \cdot 3 \cdot 10^{10}} \approx 3 \cdot 10^{-4} \sqrt{E},$$

wobei E in eV einzusetzen ist.

Für $E = 10^6$ eV wird $l \approx 0{,}3$; für $E = 10^7$ eV erhält man $l \approx 1$.

Die Abschätzung zeigt, daß für zwei Nukleonen bei Energien $E < \approx 10$ MeV nur Werte mit $l = 0$ möglich sind. Zu beachten ist, daß die Beziehung $pb = l\hbar$ nicht streng gilt, denn die Unschärferelation sagt aus, daß bei gegebenem Impuls p eine Unschärfe $pb \geqq \hbar$ auftritt.

In der Quantenmechanik erfolgt die Beschreibung des Zustandes von Teilchen durch die Wellenfunktion Ψ, die der Schrödinger-Gleichung genügt. Für die Wechselwirkung zweier Nukleonen miteinander in einem kugelsymmetrischen Potential $V(r)$ hat die Schrödinger-Gleichung die Form:

$$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\Psi = 0 \qquad (E = \text{Gesamtenergie}). \tag{9.1}$$

Man erkennt, daß sich die Wechselwirkung zweier Teilchen durch die Schrödinger-Gleichung für 1 Teilchen in einem Zentralfeld beschreiben läßt. Dies geschieht durch Einführung der Relativ- und Schwerpunktkoordinaten.

Der Teilchenstrom, der auf das Streuzentrum trifft, wird durch eine ebene Welle dargestellt:

$$\Psi \approx e^{ikz}; \qquad k = \frac{p}{\hbar} = \frac{1}{\lambda\!\!\!^{-}} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \tag{9.2}$$

Für große Entfernungen, wo $V(r) = 0$, nimmt Gl. (9.1) die Form an:

$$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0. \tag{9.3}$$

Die asymptotische Lösung der Schrödinger-Gleichung, also die Lösung von Gl. (9.1), hat die Form:

$$\Psi = \mathrm{e}^{ikz} + \frac{f(\Theta)}{r} \mathrm{e}^{ikr} \qquad (z = r \cos \Theta). \tag{9.4}$$

Man erhält also eine vom Streuzentrum ausgehende Kugelwelle, die sich der einfallenden ebenen Welle überlagert. Θ bedeutet den Winkel, unter dem die Streuung beobachtet wird, $f(\Theta)$ die Amplitude der gestreuten Welle, die mit dem Abstand $1/r$ abnimmt. Man erkennt, daß $f(\Theta)$ die Dimension einer Länge hat; sie wird als Streuweglänge bezeichnet.

Das Quadrat des absoluten Betrages der Wellenfunktion, $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$, ergibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens in der Umgebung des Ortes x, y, z, ist also proportional der Teilchendichte im Raum. Das Quadrat des absoluten Betrages der Amplitude der Streuwelle ist demnach gleich dem differentiellen Streuquerschnitt:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\omega} = |f(\Theta)|^2. \tag{9.5}$$

Diese Beziehung folgt aus den anschließenden Überlegungen: Die Streuung an einem kugelsymmetrischen Potential ist abhängig vom Breitenwinkel Θ, nicht jedoch vom Azimutwinkel φ. Die Zahl der unter dem Winkel Θ in den Raumwinkel $\mathrm{d}\omega$ gestreuten Teilchen beträgt, wenn N die Zahl der auftreffenden Teilchen ist, $\mathrm{d}N$ (vgl. Abb. 40). Wie früher gezeigt wurde, ist $\mathrm{d}N = \alpha N \,\mathrm{d}\omega$ und $\alpha \,\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\sigma$ gleich dem differentiellen Streuquerschnitt. N ist die Teilchenzahl pro Quadratzentimeter und Sekunde, $\mathrm{d}N$ die unter dem Winkel Θ in dem Raumwinkelelement $\mathrm{d}\omega$ gemessene Anzahl von Streuteilchen pro Sekunde. Da $|\Psi|^2$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß ein Streuteilchen sich an der Stelle x, y, z befindet, wird die Zahl der auftreffenden Teilchen N zu 1 Teilchen pro Volumeneinheit normiert, also wird $N = v$, wenn v die Geschwindigkeit der Teilchen ist. Aus Gl. (9.4) erhält man dann

$$\mathrm{d}N = \left| f(\Theta) \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \right|^2 v r^2 \,\mathrm{d}\omega = |f(\Theta)|^2 v \,\mathrm{d}\omega$$

und damit

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = |f(\Theta)|^2 \,\mathrm{d}\omega,$$

woraus Gl. (9.5) folgt. (Die Relativgeschwindigkeit v ändert sich nicht beim elastischen Stoß.)

Durch die Bestimmung von $f(\Theta)$ wird demnach die Berechnung der Streuung durchgeführt. Da die gestreute Welle eine Kugelwelle ist, hat man die Lösung der Gleichungen (9.3) und (9.4) in Polarkoordinaten zu betrachten. Die allgemeine Lösung hat die Form:

$$\Psi = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{r} \varphi_l(r) P_l(\cos\Theta)$$

(vgl. Anh. II).

φ_l ist die radiale Wellenfunktion, P_l (cos Θ) sind die Legendreschen Polynome. Für große r kann $\varphi_l(r)$ für jeden Wert von l in zwei Partialwellen, eine einlaufende und eine auslaufende, zerlegt werden:

$$\Psi_l(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)\,\mathrm{i}^l}{2\mathrm{i}\,kr} P_l(\cos\Theta)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}\right]. \tag{9.6}$$

Der Streuprozeß ergibt, wie das Gl. (9.6) ausdrückt, zur einfallenden Welle noch eine auslaufende Welle. Die Änderung der einfallenden Welle kann durch Einführung eines Phasenwinkels δ_l charakterisiert werden. Die theoretische Durchrechnung ergibt dann:

$$f(\Theta) = \lambda\!\!\!^{-} \sum_l (2l+1) \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_l} - 1}{2\mathrm{i}} P_l(\cos\Theta).$$

Setzt man $f(\Theta)$ in Gl. (9.5) ein und integriert über den ganzen Raumwinkel 4π, so erhält man den totalen Streuquerschnitt:

$$\sigma = \int |f(\Theta)|^2 \,\mathrm{d}\omega = 4\pi\lambda\!\!\!^{-2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\sin^2\delta_l. \tag{9.7}$$

Für S-Streuung, $l = 0$, erhält man

$$\sigma_0 = 4\pi\lambda\!\!\!^{-2} \sin^2\delta_0. \tag{9.8}$$

Ist außer der S-Streuung noch die P-Streuung beteiligt, so erhält man

$$\sigma_{01} = 4\pi\lambda\!\!\!^{-2}(\sin^2\delta_0 + 3\sin^2\delta_1) \quad \text{usw. für } l > 1.$$

Die Bestimmung des totalen Streuquerschnittes ist damit auf die Berechnung der Phasenwinkel δ_l reduziert. Die Durchrechnung ergibt jedoch einen sehr komplizierten Zusammenhang zwischen den Phasenwinkeln δ_l und der Energie des Teilchens. Im Anschluß an Darstellungen von FERMI sei hier nur ein einfacher Fall, die Streuung bei geringen Energien, $T \ll V_0$, betrachtet. Als Potential wird eine rechteckige Potentialmulde der Tiefe V_0 angenommen. Für diesen Fall hat die Schrödinger-Gleichung die Form:

$$v'' + \frac{2m}{\hbar^2} V(r)\, v = 0. \tag{9.9}$$

Für $r > r_0$ ist die Wellenlänge $\lambda\!\!\!^- = \frac{\hbar}{\sqrt{2mT}}$ wesentlich größer als für $r < r_0$, wo sie $\lambda\!\!\!^- = \frac{\hbar}{\sqrt{2mV_0}}$ beträgt. In der Nähe von r_0 kann diese sich langsam verändernde Sinuswelle annähernd durch eine Gerade dargestellt werden (Abb. 37), deren Gleichung

$$v = c(r - a)$$

lautet. Die Lösung der Gl. (9.9) ergibt eine Sinuswelle:

$$A \sin\left(\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mV_0}\,r\right) = A \sin\frac{p}{\hbar}\,r.$$

Unter Einfügung des Phasenwinkels δ_0 erhält man

$$v = A \sin\left(\frac{pr}{\hbar} + \delta_0\right) \approx A\left(\frac{pr}{\hbar} + \delta_0\right) = c(r - a).$$

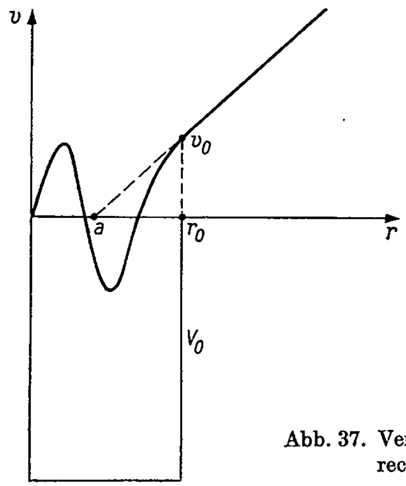


Abb. 37. Verlauf der Ψ-Welle in der Umgebung einer rechteckigen Potentialmulde (FERMI)

Hieraus folgt $c = \frac{p}{\hbar} A$ und $A\delta_0 = -ca$, also $\delta_0 = -\frac{p}{\hbar} a = -\frac{1}{\lambda\!\!\!^-} a$.

Für den Streuquerschnitt σ ergibt sich damit

$$\sigma = 4\pi a^2. \tag{9.10}$$

Im Falle der rechteckigen Potentialmulde kann man a, das etwa in der Größe des Kernradius r_0 liegt, noch etwas genauer abschätzen. Die Differenz $r_0 - a$ läßt sich bestimmen zu

$$r_0 = \left(\frac{v_0}{\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}r}}\right)_{r=r_0} + a.$$

Es ist $v_0 = A \sin kr$, wo $k = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$ bedeutet. Es wird dann

$$r_0 - a = \frac{A \sin kr_0}{Ak \cos kr_0} = \frac{1}{k} \tan kr_0.$$

Für a erhält man

$$a = r_0 \left(1 - \frac{1}{kr_0} \tan kr_0\right),$$

und der Streuquerschnitt wird

$$\sigma = 4\pi r_0^2 \left(1 - \frac{1}{kr_0} \tan kr_0\right)^2. \tag{9.11}$$

Anschaulicher läßt sich der Streuprozeß darstellen, wenn man dem Kern eine positive Potentialschwelle $+V_0$ zuschreibt. Die Gleichung $v'' - \frac{2m}{\hbar^2} Vv = 0$ hat dann die Lösung $v = A \sin k_1 r$. Es sei $V(r) = +V_0$ für $r < r_0$ und $V(r) = 0$ für $r > r_0$. Es folgt dann

$$v = \frac{A \sinh k_1 r_0}{k_1 \cosh k_1 r_0} = \frac{1}{k_1} \tanh k_1 r_0.$$

Für große k_1 wird das zweite Glied annähernd 0, und man erhält

$$\sigma = 4\pi r_0^2.$$

Anschaulich läßt sich dieses Resultat folgendermaßen interpretieren: Aus der Quantelung des Drehimpulses folgte $pb = \hbar \sqrt{l(l+1)}$. Der geometrische Querschnitt für den Stoßparameter $b = \lambda\!\!\!^{-} \sqrt{l(l+1)}$ ist nach Kap. 9.1

$$Q = \frac{1}{2} \pi (b_{l+1}^2 - b_{l-1}^2) = (2l+1) \pi \lambda\!\!\!^{-2}.$$

Den Gesamtquerschnitt für die Summe über zahlreiche l-Werte kann man leicht errechnen, wenn man die obere Grenze für l abschätzt. Aus dem raschen Abfall des Potentials der Kernkräfte kann man folgern, daß für Stoßparameter $b > \approx R$ keine Wechselwirkung zwischen Teilchen und Kern mehr stattfindet. Hieraus folgt, daß der obere Wert von l begrenzt ist und daß wegen $b \approx \lambda\!\!\!^{-} l$ mit $b = R$ diese Grenze bei $l = R/\lambda\!\!\!^{-}$ liegt. Der Querschnitt wird dann

$$Q = \sum_{l=0}^{R/\lambda\!\!\!^{-}} (2l+1) \pi \lambda\!\!\!^{-2}.$$

Mit Hilfe der Summe für die arithmetische Progression $\sum_l (2l+1)$ erhält man

$$Q = \pi (R + \lambda\!\!\!^{-})^2. \tag{9.12}$$

Für $l = 0$ erhält man den geometrischen Querschnitt $\pi\lambda\!\!\!^{-2}$ als maximalen Wert. Aus Gl. (9.10) folgt jedoch ein maximaler Querschnitt von $4\pi\lambda\!\!\!^{-2}$. Dieser größere Querschnitt folgt aus der Interferenz der einfallenden Welle und der gestreuten Welle, wenn lediglich Streuung vorliegt. Man erhält eine Verdoppelung für die Amplitude der Streuwelle und somit den vierfachen Wert für Streuintensität und Streuquerschnitt.

9.2. Deuteron

Der einfachste zusammengesetzte Kern, das Deuteron, besteht aus einem Neutron und einem Proton in gebundenem, stabilem Zustand. Die vorangestellten Betrachtungen über die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung lieferten einleitende Vorstellungen über den Mechanismus bei der Wechselwirkung dieser Teilchen, die zum Verständnis für die Bildung einer stabilen Verbindung zwischen Neutron und Proton als notwendig erscheinen. Aus den experimentellen Daten für das Deuteron sind Schlüsse auf die zwischen seinen Bausteinen wirkenden Kräfte zu ziehen. Tabelle 10 zeigt die Eigenschaften des Deuterons und seiner Bestandteile.

Massendefekt, Spin, magnetisches Moment und Quadrupolmoment sind die charakteristischen Daten für das Deuteron. Das positive Vorzeichen des magnetischen Moments vom Proton besagt, daß die Richtungen von magnetischem und Drehmoment zusammenfallen. Nach der klassischen Elektrodynamik tritt das ein, wenn das magnetische Moment durch die Rotation einer positiven Ladung erzeugt wird. Der Massenunterschied zwischen Neutron und Proton entspricht einer Energie von 782 keV. Hieraus folgt, daß das Neutron in freiem Zustand instabil gegenüber β-Zerfall ist. Seine Halbwertszeit beträgt etwa 13 min.

Die geringe Größe des Quadrupolmoments beim Deuteron weist darauf hin, daß seine Abweichung von der Kugelsymmetrie unerheblich ist. Man kann daher annehmen, daß sein Grundzustand ein S-Zustand ist ($l = 0$). Der Spin des Deuterons ist 1, entspricht somit einem Triplettzustand. In diesem Falle sollte das magnetische Moment des Deuterons gleich der Summe der magnetischen Momente von Neutron und Proton sein. Diese Summe ist jedoch um 0,0223 Kernmagnetonen größer als das gemessene magnetische Moment des Deuterons, eine Abweichung, die weit außerhalb der Fehler derartiger Beobachtungen liegt. Hieraus und auch aus dem Vorhandensein eines elektrischen Quadrupolmomentes läßt sich schließen, daß der Grundzustand des Deuterons kein reiner S-Zustand ist. Bei den folgenden Betrachtungen sei auf die geringen Abweichungen von der Kugelsymmetrie keine Rücksicht genommen und ein reiner S-Zustand vorausgesetzt. Aus diesen Daten soll auf das Potential für die Wechselwirkung zwischen Neutron und Proton geschlossen werden. Es läßt sich hierdurch nicht der gesamte Potentialverlauf $V(r)$ ermitteln, doch gehen geringe Änderungen seines Verlaufes, insbesondere für größere r-Werte, am Rande der Potentialmulde, nicht sehr erheblich in die Rechnungen und ihre Ergebnisse ein. Man kann daher zunächst ein rechteckiges Potential annehmen, das die folgende Form besitzt:

$$V(r) = U(r)\,[\alpha + \beta(\sigma_1\sigma_2) + \gamma(\sigma_1\boldsymbol{r}_{12})(\sigma_2\boldsymbol{r}_{12})].$$

$U(r)$ habe für alle drei Glieder der Gleichung dieselbe Form, nämlich die einer rechteckigen Potentialmulde. Weiterhin sei zunächst angenommen, daß γ, das die Größe der nichtzentralen Kräfte angibt, zu vernachlässigen sei. Unsere Potentialfunktion hat dann die Form: $V(r) = U(r)\,[\alpha + \beta\,(\sigma_1\sigma_2)]$. Man erhält als Wechselwirkungspotentiale für den Triplett- und den Singulettzustand der beiden Nukleonen — des Deuterons —

$$\left.\begin{aligned} V_3(r) &= U(r)\,[\alpha + \beta]; \\ V_1(r) &= U(r)\,[\alpha - 3\beta]. \end{aligned}\right\} \tag{9.13}$$

Folgendermaßen ist die Berechnung von $\sigma_1 \cdot \sigma_2$, aus der Gl. (9.13) abgeleitet wird. Klassisch erhielte man:

$$S^2 = s_1^2 + s_2^2 + 2\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2;$$

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \frac{S^2 - s_1^2 - s_2^2}{2}.$$

Quantentheoretisch erhält man, da S^2 durch $S(S+1)$ zu ersetzen ist und analog $s_1^2 \to s_1(s_1+1)$ sowie $s_2^2 \to s_2(s_2+1)$ und weiterhin für unseren Fall zweier Nukleonen $s_1 = s_2 = \sigma/2$ wird:

$$\left(\frac{1}{2}\,\sigma_1\right)\left(\frac{1}{2}\,\sigma_2\right) = \frac{S(S+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)}{2}.$$

Daraus ergibt sich

$$\sigma_1\sigma_2 = 2[S(S+1) - 2s(s+1)].$$

Für den Triplettzustand $S = 1$ erhält man

$$(\sigma_1\sigma_2)_{\mathrm{Tr}} = 2\left(2 - 2\cdot\frac{3}{4}\right) = 1$$

und für den Singulettzustand

$$(\sigma_1\sigma_2)_{\mathrm{Si}} = 2\left(0 - 2\cdot\frac{3}{4}\right) = -3.$$

Die Schrödinger-Gleichung hat folgende Form:

$$\Delta\Psi + \frac{M}{\hbar^2}(E - V)\,\Psi = 0. \tag{9.14}$$

Hier ist M die abgeleitete Masse: $M = \dfrac{M_{\mathrm{n}} M_{\mathrm{p}}}{M_{\mathrm{n}} + M_{\mathrm{p}}} = \dfrac{1}{2}\,M_{\mathrm{p}}$. Die Energie E ist im stabilen Zustand des Deuterons dessen Bindungsenergie und hat negatives Vorzeichen. Man erhält für $V(r)$:

$$V(r) = \left\{\begin{matrix} -V_0 \text{ für } r < r_0, \\ 0 \text{ für } r > r_0. \end{matrix}\right\} \tag{9.15}$$

Beim Grundzustand mit $l = 0$ sei $\Psi = \frac{1}{r} u(r)$. Es ergibt sich dann für die Wellenfunktion

$$k_i = \frac{1}{\hbar} \sqrt{M(V_0 - E)} \quad \text{und} \quad k_a = \frac{1}{\hbar} \sqrt{M(-E)} = i k.$$

Man erhält dann innerhalb und außerhalb der Potentialmulde:

Innen	Außen
$u'' + k_i^2 u = 0;$	$u'' = k^2 u;$
$u = \sin k_i \cdot r;$	$u = C e^{-kr}.$

Aus der Forderung eines stetigen Übergangs der Funktion $V(r)$ von außen nach innen folgt für $r = r_0$:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{u'}{u}\right)_{i r_0} &= \left(\frac{u'}{u}\right)_{a r_0} \qquad \frac{k_i \cos(k_i r_0)}{\sin(k_i r_0)} = -k_a; \\ k_i \cot(k_i r_0) &= -k_a. \end{aligned}\right\} \tag{9.16}$$

Setzt man $x = k_i r_0$ und $y = k_a r_0$, so erhält man aus Gl. (9.16) $y = -x \cot x$ und $x^2 + y^2 = \frac{M V_0}{\hbar^2} r_0^2$.

Diese Gleichungen lassen sich graphisch lösen. Die Lösungen ergeben sich aus den Schnittpunkten der Funktion $y = -x \cot x$ mit den Kreisen um den Nullpunkt des Koordinatensystems für den Radius $\frac{1}{\hbar} \sqrt{M V_0 r_0^2}$. Der kleinste (negative) Wert von y wird erreicht für $x = \frac{\pi}{2}$, und $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{4} = \frac{M V_0}{\hbar^2} r_0^2$ würde bedeuten, daß für $V_0 r_0^2 < \frac{\pi^2}{4} \frac{\hbar^2}{M}$ kein stabiler Zustand des Systems Proton-Neutron existieren kann. Mit $r_0 = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm und $|E| = 2{,}224$ MeV erhält man $y = 0{,}65$. Für x erhält man dann aus den Kurven von $y = -x \cot x$ den Wert 2. Demnach wird $x^2 + y^2 = 4{,}42$, und man erhält $V_0 = 4{,}42\, \hbar/M r_0{}^2 \approx$ ≈ 23 MeV. Aus Gl. (9.16) ergibt sich $k_i \cot(k_i r_0) = -k_a$. Weiterhin war

$$k_i = \frac{1}{\hbar} \sqrt{M(V_0 - E)} \quad \text{und} \quad k_a = \frac{1}{\hbar} \sqrt{M\,|-E|}.$$

Ist E klein gegen V_0, wie das beim Deuteron der Fall ist, so kann man E gegenüber V_0 vernachlässigen und erhält

$$\cot(k_i r_0) = \frac{k_a}{k_i} = -\sqrt{\frac{E}{V_0}}.$$

Daher ist $\cot(k_i r_0)$ negativ und sein Betrag klein. Damit ergibt sich $k_i r_0$ zu etwas größer als $\pi/2$. (Ein Betrag $3\pi/2$, der formal möglich wäre, ergibt keine richtige Lösung, denn bei $k_i r_0 = \pi$ hätte die Wellenfunktion einen Knoten und würde

nicht einem Zustand minimaler Energie entsprechen.) Setzt man näherungsweise $k_1 r_0 \approx \pi/2$, so erhält man (für $E \ll V_0$):

$$V_0 r_0^2 \approx \left(\frac{\pi \hbar}{2}\right)^2 \frac{1}{M}.$$

$V_0 r_0^2$ ist in Wirklichkeit etwas größer als der Ausdruck auf der rechten Seite vorstehender Gleichung. Jedoch muß $k_1 r_0 < \pi$ sein, also

$$V_0 r_0^2 < (\pi \hbar)^2 \frac{1}{M}.$$

Als Wellenfunktion ergeben die Gleichungen (9.16) innerhalb der Potentialmulde $u = \sin k_1 r$ und außerhalb $u = c e^{-kr}$. Im Punkt $r = r_0$ sind beide Funktionen stetig aneinander angeschlossen. Aus den Randbedingungen $u(0) = 0$ und $u(\infty) = 0$, die aus der Bedeutung der Funktion $|u(r)|^2$ als Wahrscheinlichkeit dafür, daß die beiden Teilchen im Abstand zwischen r und $r + \mathrm{d}r$ angetroffen werden, folgen, ergibt sich das in Abb. 38 wiedergegebene Bild der Wellenfunktion beim Deuteron. Man erkennt, daß die mittlere Entfernung der beiden Nukleonen

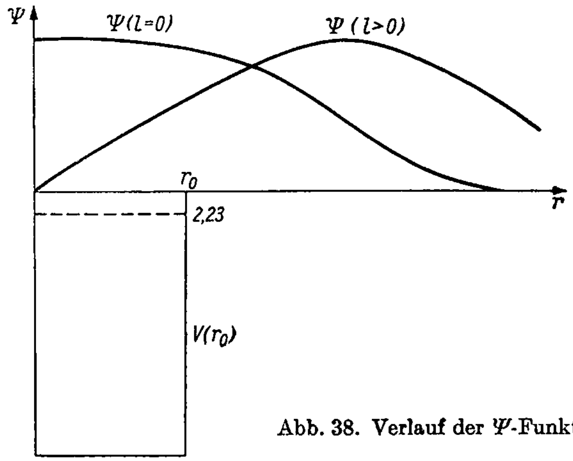


Abb. 38. Verlauf der Ψ-Funktion für das Deuteron

voneinander die Reichweite r_0 der Kernkräfte übersteigt. Zu etwa 40% der Zeit befinden sich beide Nukleonen in Abständen größer als r_0. Als Größe, die die Ausdehnung des Deuterons charakterisiert, nimmt man den Abstand der Nukleonen voneinander an, bei dem die Amplitude der Wellenfunktion auf den e-ten Teil abgenommen hat. Dies ergibt $R = \frac{1}{k} = \frac{\hbar}{\sqrt{M|E|}} = 4{,}3 \cdot 10^{-13}$ cm. Berücksichtigt man Glieder mit höheren l-Werten als $l = 0$, so erhält man folgende Ergebnisse, die durch den Einfluß der beträchtlich mit l wachsenden Zentrifugalenergie bedingt sind. Die Zentrifugalenergie $\frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{m^2 r^2 \dot{\varphi}^2}{2m} = Z$ hängt, wie leicht

zu erkennen ist, mit dem Drehimpuls $mr\dot{\varphi}r = \hbar l$ zusammen, so daß sich $Z = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$ ergibt. Die Schrödinger-Gleichung nimmt dann die Form an:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(r) - \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\Psi = 0. \tag{9.17}$$

Für kleine r wird Ψ angenähert

$$\Psi_l(r) \sim r^{l+1}.$$

Man erhält daher für größere l-Werte innerhalb der Potentialmulde (kleine r) geringe Amplituden von Ψ. Das Deuteron besitzt daher keine gebundenen Zustände für größere l-Werte, das Kernpotential $V(r)$ ist nicht mehr wirksam. Für $r = r_0$ (Kernradius) ergibt sich die Höhe der Potentialschwelle zu

$$V_Z = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \approx 10\,\frac{l(l+1)}{A^{2/3}}\ \text{MeV bei } r = 1{,}4\cdot 10^{-13}\,A^{1/3}\text{cm}. \tag{9.18}$$

9.3. Streuung von Neutronen geringer Energien an Protonen

Auf Grund der Betrachtungen für die Wechselwirkung von Nukleonen mit Protonen wurden die Beziehungen (Kap. 9.1.)

$$\begin{aligned} f(\Theta) &= \lambda\!\!\!^{-} \sum_l (2l+1)\,e^{i\delta_l}\sin(\delta_l)\cdot P_l(\cos\Theta) \\ &= \lambda\!\!\!^{-} \sum_l (2l+1)\,\frac{e^{2i\delta_l}-1}{2i}\,P_l(\cos\Theta) \end{aligned}$$

aufgestellt. Hieraus folgt mit Gl. (9.7) für den differentiellen Streuquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \left|\frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)\,P_l(\cos\Theta)\,(e^{2i\delta_l}-1)\right|^2 = |f(\Theta)|^2.$$

Für den totalen Streuquerschnitt ergab sich

$$\sigma = \int |f(\Theta)|^2\,d\omega = 4\pi\lambda\!\!\!^{-2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l$$

mit $\quad k = \frac{1}{\lambda\!\!\!^{-}} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{ME}{\hbar^2}}$

und weiterhin

$$\sigma_0 = 4\pi\hbar^2\sin^2\delta_0;\quad \sigma_{01} = 4\pi\hbar^2(\sin^2\delta_0 + 3\sin^2\delta_1).$$

Bei sehr geringen Energien wird k klein und an Stelle von $\frac{1}{k^2}\sin^2\delta_0$ tritt $\frac{\delta_0^2}{k^2} \to a^2$. Die Länge a wird „Fermische Streuweglänge" genannt.

Für große Abstände r vom Streuzentrum hat die Wellenfunktion die Form

$$u_l(r) \approx \sin\left(kr - \frac{\pi}{2}\,l + \delta_l\right)$$

und für $l = 0$

$$u_0(r) \approx \sin(kr + \delta_0).$$

Ist k klein, so geht $\sin(kr + \delta_0)$ über in $(kr + \delta_0)$. Für den Radius $r = -\delta_0/k$ wird die Wellenfunktion 0. Der Knoten der Wellenfunktion kann links oder rechts von $r = 0$ liegen. Das Vorzeichen der Streuweglänge a soll so gewählt werden, daß $a = -\delta_0/k$ wird. Eine positive Phase δ_0 entspricht dann einer negativen Streuweglänge, und die Wellenfunktion hat für kleine Energien die Form $k(r - a)$.

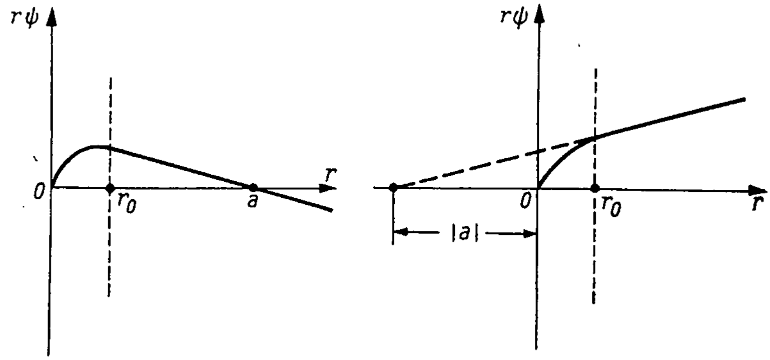


Abb. 39. Darstellung der Fermi-Streuweglänge

Dies ist der normale Fall, und eine positive Streuweglänge $+a$ entspricht einer harten Kugel vom Radius a. Die Streuweglänge läßt sich aus Experimenten mit langsamen Neutronen bestimmen. Ein vollständig abstoßendes Potential, ein Coulomb-Potential, führt zu positiven Streuweglängen a (Abb. 39). Anziehende Potentiale können je nach der Form des Potentials positive oder negative Beträge für a liefern (vgl. Abb. 39). $\delta_0 \to -ka$ läßt sich verallgemeinern, wenn man statt des $\sin\delta_0$ den Tangens einführt. $\tan\delta_0 = -ka(k)$ kann beliebige Werte annehmen. Man erhält dann

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 = \frac{4\pi}{k^2}\left(\frac{1}{1+\cot\delta_0}\right) = \frac{4\pi}{k^2 + \frac{1}{a^2(k)}}. \tag{9.19}$$

Demnach läßt sich, bei Kenntnis von $k\cot\delta_0 = -1/a$, also der Energieabhängigkeit von a, die Streuung für S-Wellen vollständig bestimmen. Bei sehr geringen Energien geht a in die Fermische Streuweglänge über: $\lim_{k\to 0} a(k) \to a$.

In Kap. 9.3. wurde abgeschätzt, daß bei der Neutron-Proton-Wechselwirkung für Energien bis zu etwa 10 MeV nur Bahndrehimpulse mit $l = 0$ wirksam sind. Die Betrachtungen für geringe Energien können daher darauf beschränkt werden, die Streuphase S_0 zu ermitteln. Dies ist in einfacher Form bereits ausgeführt worden. Das Potential für die Wechselwirkung zwischen Neutron und Proton sei durch eine rechteckige Potentialmulde der Tiefe V_0 beschrieben, wobei der Radius $r_0 = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm sei. Es werden wiederum die Wellenfunktionen außerhalb und innerhalb des Bereiches r_0 betrachtet. Die Gesamtenergie sei jedoch nun auch außerhalb von r_0 größer als die potentielle Energie. Das führt zu einer periodischen Lösungsfunktion an Stelle der Potentialfunktion (vgl. Gl. (9.15ff.)). Mit $(\hbar k)^2 = M E^S = 1/2\, M E^L$, wobei E^S die Energie im Schwerpunkt- und E^L entsprechend im Laboratoriumssystem ist, erhält man:

$$\left.\begin{array}{llcl} & \text{Innen} & & \text{Außen} \\ u: & \sin(k_i r) & & c \sin(kr + \delta_0) \\ \left(\dfrac{u'}{u}\right)_{r_0}: & k_i \cot(k_i r_0) & = & k \cot(k r_0 + \delta_0) \\ & k_i = \dfrac{1}{\hbar}\sqrt{M(E^S + V)} & & k = \dfrac{1}{\hbar}\sqrt{M E^S}. \end{array}\right\} \quad (9.20)$$

Für den Grundzustand des Deuterons erhielten wir

$$k_i' \cot k_i' r_0 = -k_a \quad \text{und} \quad k_a = \frac{1}{\hbar}\sqrt{M\,|E^{\text{Triplett}}|}.$$

Setzt man für geringe Energien näherungsweise $k_i \approx k_i' \approx \frac{1}{\hbar}\sqrt{M V_0}$, so ergibt sich aus Gl. (9.20) $k \cot(k r_0 + \delta_0) \approx k_i \cot k_i' r_0 = -k_a = -\frac{1}{\hbar}\sqrt{M\,|E^{\text{Triplett}}|}$. Für kleine Energien E^S und $k r_0 \ll 1$ erhält man näherungsweise

$$\cot(k r_0 + \delta_0) \approx \cot \delta_0 = -\frac{k_0}{k} = -\frac{\sqrt{|E^{\text{Triplett}}|}}{E^S}.$$

Hierbei liegt δ_0 zwischen $\pi/2$ und π (negatives Vorzeichen). Nach Umformung des Cotangens in den Sinus folgt:

$$\sin \delta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \delta_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{|E^{\text{Triplett}}|}{E^S}}}.$$

Für den Streuquerschnitt erhält man

$$\left.\begin{array}{l} \sigma = \dfrac{4\pi}{k^2}\sin^2 \delta_0 = \dfrac{4\pi}{k^2}\,\dfrac{E^S}{E^S + |E^{\text{Triplett}}|}; \\ \sigma = \dfrac{4\pi\,\hbar^2}{M[E^S + |E^{\text{Triplett}}|]}. \end{array}\right\} \quad (9.21)$$

Die experimentellen Ergebnisse der Streuung von Nukleonen an Protonen weichen von der theoretisch berechneten Streuung erheblich ab. Die theoretische Kurve für den Wirkungsquerschnitt sollte für kleine Energien ($E \ll E^{\text{Triplett}}$) konstant verlaufen. Für Energien oberhalb von etwa 10^5 eV stimmt der theoretische mit dem experimentellen Kurvenverlauf überein. Im Bereich der Neutronenenergien von einigen eV bis gegen 10^5 eV erhält man theoretisch einen viel zu kleinen Wert für σ, nämlich etwa 4,5 barn, während das Experiment 20,3 barn liefert. Dieser Unterschied läßt sich durch die verschiedene Größe der Potentiale $V_1(r)$ und $V_3(r)$ erklären (s. Gl. (9.13)). Der Wert von V_1 läßt sich aus den gemessenen σ-Werten errechnen. Die statistischen Gewichte für den Triplett- und für den Singulettzustand sind 3 bzw. 1 (proportional $(2l + 1)$).

$$\sigma = \frac{3}{4}\,\sigma_3 + \frac{1}{4}\,\sigma_1;$$

$$20{,}3 = \frac{3}{4}\cdot 4{,}4 + \frac{1}{4}\,\sigma_1;\quad \sigma_1 = 4\pi a_1^2 = 68\cdot 10^{-24}\,\text{cm}^2,\quad a_1 = 2{,}32\cdot 10^{-12}\,\text{cm};$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{-2\mu V_0}{\hbar^2}} = 5{,}28\cdot 10^{12}\,\text{cm}^{-1};\qquad V_1 = -11{,}5\,\text{MeV}. \tag{9.22}$$

Die Berechnung von k_1 erfolgte wie in Gl. (9.20). Ebenso erhält man aus

$$\sigma = 4\pi r_0^2\left(1 - \frac{\tan k r_0}{k r_0}\right)$$

mit $r_0 = 2{,}8\cdot 10^{-13}$ cm und $\sigma_1 = 68\cdot 10^{-24}\,\text{cm}^2$ den Wert $k_1 = 5{,}28\cdot 10^{12}\,\text{cm}^{-1}$. Man erkennt, daß die Tiefe der Potentialmulde für den Singulettzustand nur etwa die Hälfte des für den Triplettzustand gefundenen Betrages ist. Die Energie für den Singulettzustand erhält man aus Gl. (9.21):

$$\sigma = \frac{4\pi\hbar^2}{M}\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{E^{\text{S}} + |E^{\text{Triplett}}|} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{E^{\text{S}} + |E^{\text{Triplett}}|}\right]. \tag{9.23}$$

Für $|E^{\text{Singul.}}|$ erhält man $64\cdot 10^3$ eV.

Geht man zu sehr geringen Neutronenenergien über, so treten weitere Erscheinungen auf, die mit der Bindung der Protonen im Molekül und ihrer thermischen Bewegung zusammenhängen. Diese Fragen werden weiter unten kurz berührt werden.

9.4. Schnelle Neutronen

Für schnelle Neutronen von $E^{\text{L}} \approx 20$ MeV und mehr beginnen die Zustände mit hohen l-Werten wirksam zu werden. Die Wellenfunktion $\psi = e^{ikr} + \frac{e^{ikr}}{2ikr}\cdot\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\vartheta)\,(2l+1)\,(e^{i2\delta_l} - 1)$ enthält Phasen mit $l > 0$. Für $E^{\text{L}} < 200$ MeV

hat man mit Drehimpulsen bis zu $l = 3$ zu rechnen. Je nach der Art der Kernkräfte wird sich eine unterschiedliche Richtungsverteilung der gestreuten Neutronen ergeben. Für gewöhnliche Kräfte ist bei hohen Energien bevorzugt eine Vorwärtsstreuung zu erwarten. Bei „Austauschkräften" ergibt sich vorzugsweise eine Rückwärtsstreuung. Die experimentell bestimmten differentiellen Streuquerschnitte zeigen ungefähr Symmetrie zu $\pi/2$. Hieraus läßt sich schließen, daß der Anteil der Austauschkräfte etwa 50% der Kernkräfte beträgt. Eine eingehende Behandlung würde im Rahmen dieser Schrift zu weit führen. Eine schematische Darstellung für die Winkelverteilung bei der (n—p)-Streuung zeigt Abb. 40.

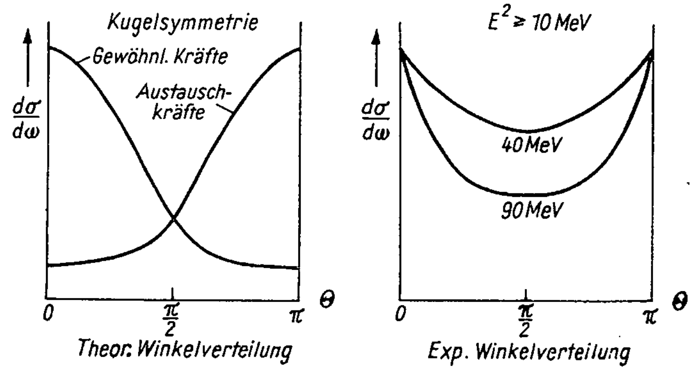


Abb. 40. Winkelverteilung bei der Streuung schneller Neutronen (schematisch)

9.5. Streuung sehr langsamer Neutronen

Wegen ihrer Bedeutung für die Strukturbestimmung von Kristallen und Festkörpern seien die physikalischen Grundlagen der Streuung sehr langsamer Neutronen kurz umrissen.

Unter den folgenden Bedingungen sei die Streuung eines Neutrons an einem Proton betrachtet: Das ruhende Störfeld $V(r)$ gegenüber der Ψ-Welle sei klein im Vergleich zur Energie der auffallenden Teilchen. Die Lösung der Schrödinger-Gleichung habe die Form

$$\Psi = e^{ikr} + \Psi_1, \tag{9.24}$$

Ψ_1 genüge der Differentialgleichung

$$\Delta \Psi_1 + k^2 \Psi_1 = -\frac{2MV_0}{\hbar^2} e^{ikr}, \quad \text{wo} \quad k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{1}{2} ME}. \tag{9.25}$$

Aus der Elektrodynamik folgt, daß für genügend große Abstände von der gemittelten Ladung ϱ sich deren Potential aus der Wellengleichung $\Delta \Psi = -4\pi\varrho$

zu

$$\varphi = \frac{1}{r} \int \varrho \, \mathrm{d}r = \frac{e}{r}$$

ergibt. Andererseits hat die homogene Gleichung (9.25)

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0$$

die kugelsymmetrische Lösung

$$\Psi_1 = \frac{1}{r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}.$$

Somit lautet die Lösung für die Streuwelle in erster Näherung

$$\Psi_1 = \frac{1}{r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} \frac{2M}{\hbar^2} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} V(r) \, \mathrm{d}r. \tag{9.26}$$

Da das Kraftfeld als ruhend angenommen wurde, ergibt sich

$$\sigma \approx |\Psi_1|^2 \sim M^2. \tag{9.27}$$

Wenn das Wasserstoffatom an ein schweres Atom gebunden ist, kann man bei den vorausgesetzten sehr geringen Energien den vierfachen Querschnitt erwarten.

Betrachten wir das Verhalten mit Hilfe einer Bornschen Näherung etwas eingehender. Gleichung (9.14) lautet:

$$\Delta \Psi + \left[k^2 - \frac{2M}{\hbar^2} V(r)\right] \Psi = 0.$$

Als Lösung erhält man

$$\psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} f(\Theta)$$

mit

$$f(\Theta) = \frac{2M}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) \frac{\sin Kr}{Kr} r^2 \, \mathrm{d}r.$$

Hierbei ist

$$\boldsymbol{K} = k(\boldsymbol{n}_0 - \boldsymbol{n}), \qquad k\boldsymbol{n}_0 = \text{Vektor der auffallenden Welle},$$
$$k\boldsymbol{n} = \text{Vektor der gestreuten Welle},$$
$$K = 2k \sin \Theta/2.$$

Im Falle der Streuung des Neutrons an einem Wasserstoffmolekül wäre eine Vergrößerung des Streuquerschnitts um den Faktor 16/9 zu erwarten (Gl. 9.27).

Die strenge Berechnung der Streuung wurde von Fermi für Neutronen und Protonen durchgeführt. Es wurde die Bindung der Protonen an ihre Ruhelage durch ein Oszillator-Potential angenommen. Die Anregungsenergie $\hbar\omega$ wurde zu 3,2 eV angesetzt, das ist der Betrag für die Bindungsenergie des Wasserstoff-

atoms im Paraffin. Der qualitative Verlauf der Funktion $\sigma/\sigma_{\text{frei}}$ in Abhängigkeit von der Neutronenenergie im Maßstab $\hbar\omega$ ist in Abb. 41 gezeigt. Bei sehr geringer Energie nimmt der relative Streuquerschnitt den Wert 4 an, bei höheren Werten der Energie sinkt er bis zum Wert 1 ab. Bei Energiewerten, die ganzzahligen Vielfachen von $\hbar\omega$ entsprechen, ergeben sich Minima. Für diese wird $\sigma = \sigma_{\text{frei}}$. Für den realen Fall, in dem das Wasserstoffatom mit irgendwelchen anderen Atomen im Molekül verbunden ist, kann man ein ähnliches Bild erwarten. Die Abstände zwischen den Minima werden den Anregungsniveaus des betreffenden Moleküls entsprechen.

Bei sehr niedrigen Energien — unterhalb von 0,1 eV — ist zu berücksichtigen, daß die thermische Bewegung der Protonen und der Kraftzentren Einfluß gewinnen und den in Abb. 41 dargestellten Verlauf der σ-Werte stark verwaschen kann. Schließlich ist zu berücksichtigen, daß für kleine Neutronenenergien die De-Broglie-Wellenlänge des Neutrons groß gegen den Abstand der Atome im Molekül wird,

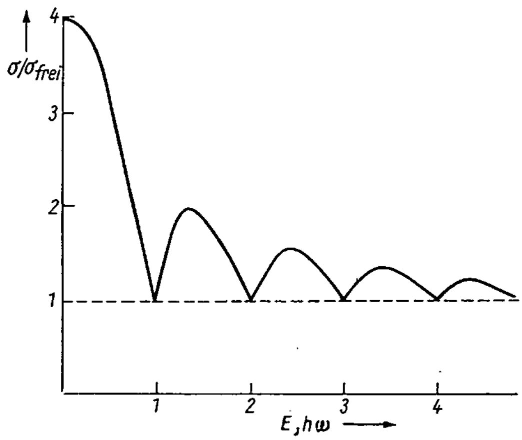


Abb. 41. Streuung sehr langsamer Neutronen

was in ähnlicher Weise wie bei der thermischen Einwirkung den Verlauf der σ-Kurve beeinflußt. Die Untersuchung von Festkörpern und Kristallen mit Hilfe langsamer Neutronen, die Aufnahme sogenannter „Neutronogramme", ist in der Physik fester und flüssiger Körper zu einem vielverwendeten Verfahren geworden. Erwähnt sei in diesem Zusammenhang auch die „magnetische Neutronographie". Da die früher zu Strukturanalysen vorzugsweise verwendeten Röntgenstrahlen keine magnetischen Momente besitzen, konnte man mit ihrer Hilfe keine Auskunft über die magnetische Struktur ferro- oder antiferromagnetischer Körper und Kristalle erhalten. In dieser Hinsicht hat die magnetische Neutronographie zu wesentlichen Erkenntnissen geführt.

10. KERNREAKTIONEN

10.1. Wirkungsquerschnitte

Der Begriff des Wirkungsquerschnittes ist bei der Behandlung der Rutherford-Streuung erläutert worden. Den weiteren Ausführungen über Streuung und Kernreaktionen seien einige zusätzliche Betrachtungen zu diesem Begriff vorangestellt. Je nach der Art der zu beschreibenden Prozesse werden verschiedene Wirkungsquerschnitte definiert, z. B. totaler, differentieller elastischer und unelastischer Streuquerschnitt, Absorptionsquerschnitt, Reaktionsquerschnitte u. a. Bei der Messung von Wirkungsquerschnitten werden solche mit guter und mit schlechter Geometrie unterschieden. Von den zahlreichen Varianten derartiger Messungen seien zwei Anordnungen gezeigt (Abb. 42).

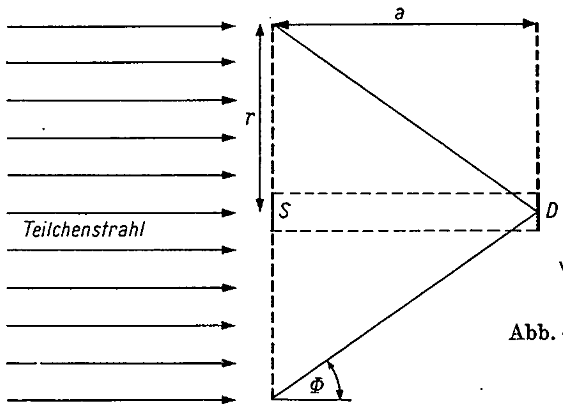


Abb. 42. Schema von Versuchsanordnungen zur Neutronenstreuung

Betrachten wir zunächst den Fall guter Geometrie bei der Streuung von Teilchen (mittlerer Teil der Abbildung). Im Mittelbereich des Strahles befindet sich, den Detektor D vollkommen gegen die Quelle abschirmend, der Streuer S. Ist N_0 die Zahl der im Detektor ohne Streuer gemessenen, N die Zahl der mit Streuer gemessenen Teilchen, so ist

$$N = N_0 \, e^{-n\sigma x},$$

wo n die Zahl der Streuzentren (Atomkerne) pro Volumeneinheit, σ den Streuquerschnitt des einzelnen Kernes und x die Dicke der Folie bedeutet. Sind die

Abmessungen von Streuer und Detektor klein gegen ihren Abstand und ist auch x hinreichend klein, so ist die Geometrie gut, und die Exponentialgleichung kann geschrieben werden:

$$\frac{(N_0 - N)}{N} = n\sigma x.$$

Hieraus läßt sich σ ermitteln, und zwar ist in diesem Falle σ der totale Streuquerschnitt, denn alle unter dem Winkel $\Phi > \approx 0°$ gestreuten Teilchen können nicht mehr in den Detektor gelangen. (Wir betrachten nur die Streuung; Absorption sowie andere Reaktionsprozesse sollen fehlen.)

Für die Streuung an einem ringförmigen Körper ist die Zahl der in den Detektor gestreuten Teilchen, wenn der direkte Strahl ($\Phi = 0°$) zum Detektor durch einen Absorber gesperrt ist:

$$N = N_0 n\sigma x \cdot \frac{2\pi r\,\mathrm{d}r}{4\pi\,(r^2 + a^2)},$$

wobei N_0 die Zahl der pro 1 cm² auf den Streuer treffenden Teilchen ist und die Fläche des Detektors unabhängig von der Einfallsrichtung 1 cm² beträgt. Es wird

$$N = N_0 n\,\sigma(\varphi)\,x\,\frac{1}{2}\tan\Phi\,\mathrm{d}\Phi.$$

Für schlechte Geometrie (Abb. 42) liegen die folgenden Verhältnisse vor: Die Folie hat einen beträchtlichen Durchmesser. Aus dem Zentralteil der Folie, die den Detektor verdeckt, werden Teilchen hinausgestreut, gelangen also nicht in den Detektor. Aus den weiterabliegenden Teilen der Folie jedoch werden Teilchen in den Detektor hineingestreut. Die Anteile sind:

$$N_1 = N_0 n\sigma x\,\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\tan\Phi\,\mathrm{d}\Phi \qquad \text{hinausgestreute Teilchen;}$$

$$N_2 = N_0 n\sigma x\,\frac{1}{2}\int_0^{\Phi}\tan\Phi\,\mathrm{d}\Phi \qquad \text{hineingestreute Teilchen;}$$

$$N = N_0 - N_1 + N_2 = N_0\left[1 - n\sigma x\,\frac{1}{2}\int_{\Phi}^{2\pi}\tan\Phi\,\mathrm{d}\Phi\right].$$

Für schlechte Geometrie kann die Variation des Streuwinkels durch Variation des Foliendurchmessers erreicht werden. Diese Methode ist naturgemäß nur für geringe Strahlenintensitäten oder kleine σ-Werte zweckmäßig.

10.2. Schema von Kernreaktionen

Kernreaktionen werden durch Beschuß eines Kerns mit meist einfachen, im allgemeinen hochenergetischen Teilchen erzielt. Diese Teilchen sind vorzugsweise Nukleonen, α-Teilchen, γ-Quanten und in geringerem Umfange schwere Teilchen.

Ein Kernprozeß wird symbolisch durch

$$A + a \rightarrow b + B + Q$$

dargestellt. A = Anfangskern, B = Endkern, a = Beschußteilchen, b = Zerfallsteilchen, Q = Energietönung. Die erste, von RUTHERFORD durchgeführte, künstliche Kernumwandlung war

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow ^{1}_{1}\mathrm{H} + ^{17}_{8}\mathrm{O} - 1{,}19\ \mathrm{MeV}.$$

Gebräuchlich ist weiterhin die kurze Schreibweise: A(a, b) B; für unser Beispiel: $^{14}\mathrm{N}(\alpha, \mathrm{p})\,^{17}\mathrm{O}$.

Folgende typische Kernreaktionen seien angeführt:

1. Elastische Streuung $A + a \rightarrow A + a$
2. Unelastische Streuung $A + a \rightarrow A^* + a'$
3. Austauschreaktion $A + a \rightarrow B + b$
4. Mehrfachprozesse $A + a \rightarrow B + b + c + \ldots$
5. Einfangprozesse $A + a \rightarrow B + \gamma$
6. Kernphotoeffekt $A + \gamma \rightarrow B + b$
7. Spaltung

Compoundkern

Die Wirkungsquerschnitte bei Kernreaktionen zeigen Extrema von sehr geringer energetischer Breite, insbesondere auch bei Anregungsenergien, die die Bindungsenergie für ein Nukleon im Kern überschreiten. Dementsprechend müssen in den Atomkernen energetisch gut definierte Niveaus existieren, deren Halbwertsbreiten in der Größenordnung von 0,1 eV liegen. Aus der Unschärferelation $\Delta E\, \Delta t \approx \hbar$ folgt, entsprechend der geringen Breite der Niveaus, eine verhältnismäßig lange Lebensdauer des Kerns im angeregten Zustande:

$$\Delta t = \frac{\hbar}{\Gamma} \approx \frac{6{,}6 \cdot 10^{-16}}{0{,}1} \approx 10^{-14}\ \mathrm{s}.$$

Schätzt man andererseits die Zeit ab, die das Nukleon zur Durchquerung eines Kerns von etwa 10^{-12} cm Radius benötigt, so erhält man bei einer Geschwindigkeit des Teilchens von 10^9 cm/s eine Zeitdauer $\Delta t \approx \frac{10^{-12}}{10^9} = 10^{-21}$ s. Eine Zeit von dieser Dauer sollte für die Kernwechselwirkung charakteristisch sein, also eine Zeit, die etwa um den Faktor 10^7 geringer ist als die aus den Niveaubreiten zu erwartenden Zeiten. Diese Schwierigkeit und weitere Probleme, die mit den später zu behandelnden Resonanzerscheinungen zusammenhängen, wurden durch NIELS BOHR 1936 auf der Grundlage des Tropfenmodells der Atomkerne gelöst.

Nach Bohr erfolgt eine Kernreaktion in zwei Etappen. In der ersten, kurzzeitigen Etappe fällt das Teilchen auf den Kern und wird von ihm eingefangen.

Hierbei entsteht ein Zwischenkern, der Compoundkern, der die Anregungsenergie

$$W = W_0 + \frac{A}{A+1} E$$

besitzt, wobei W_0 die Bindungsenergie für das eingefangene Nukleon ist und $E\,A/(A+1)$ die durch die kinetische Energie des Nukleons an den Compoundkern $A+1$ übertragene Energie bedeutet (vgl. die kinematischen Gleichungen Kap. 5.1.). Weiterhin besitzt der Compoundkern, wie aus den Erhaltungssätzen folgt, bestimmte Größen des Drehimpulses, der Parität u. a. Wegen der starken Wechselwirkung verteilt sich die Energie sehr schnell über alle Nukleonen des Kerns, und der Kern verbleibt lange Zeit in diesem Zustande, da kein Teilchen genügend Energie besitzt, um den Kern verlassen zu können. Dies wird erst möglich, wenn einem Teilchen durch Fluktuation ein genügender Energiebetrag mitgeteilt worden ist. Eine andere Möglichkeit für die Energieabgabe durch den Compoundkern besteht in der Emission eines γ-Quants.

Ein Compoundkern zerfällt unabhängig davon, auf welche Art er entstanden ist. Nach dem relativ langen Zeitraum zwischen Entstehung und Zerfall des Compoundkerns hat er, wie man sagt, „vergessen", auf welche Weise seine Bildung erfolgte. Die Wahrscheinlichkeit w für den Zerfall eines Compoundkerns unter Emission eines Teilchens ist unabhängig von der Zeit. Kann der Zerfall auf verschiedene Arten oder, wie man sagt, durch verschiedene „Reaktionskanäle" erfolgen, so ist die resultierende Zerfallswahrscheinlichkeit für die Einzelprozesse

$$w = w_\gamma + w_n + w_p + w_\alpha + \dots .$$

Die mittlere Lebensdauer des Compoundkerns beträgt $\tau = 1/w$. Durch die Unschärferelation ist die Energieunschärfe Γ eines Niveaus gegeben durch

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = w\hbar .$$

Wird Γ in eV, τ in s und w in s^{-1} ausgedrückt, so erhält man

$$\Gamma = 6{,}62 \cdot 10^{-16}\, w .$$

Bei mehreren Reaktionskanälen kann Γ auch in Partialbreiten aufspalten. Die gesamte Niveaubreite wird dann

$$\Gamma = \Gamma_\gamma + \Gamma_n + \Gamma_p + \dots .$$

Die relative Wahrscheinlichkeit für die Emission einer Teilchenart ist dann durch das Verzweigungsverhältnis, z. B. Γ_γ/Γ, gegeben.

Es seien einige Kernreaktionen, die zur Bildung des Compoundkerns führen, betrachtet. Mit Hilfe der Gl. (1.6) errechnen wir zunächst die Energiebilanzen. Die Bindungsenergie für einen (Compound-)Kern der Nukleonenzahl A und der Ladung Z ergibt sich zu

$$\Delta W(A, Z) = [Z M_p + (A - Z) M_n - M(A, Z)]c^2 ,$$

wobei M_p und M_n die bekannten Massen des Protons und des Neutrons sind; $M(A, Z)$ die Massen der Kerne, die auf Grund verschiedenartiger Methoden bestimmt und tabelliert sind.

Auf Grund der Massenbeziehungen lassen sich die energetischen Verhältnisse für die Bildung von Compoundkernen und für Kernreaktionen übersehen. Man erhält damit Hinweise für die Möglichkeit oder Unmöglichkeit bestimmter Kernreaktionen, erfährt jedoch zunächst nichts, was die Beträge der Wirkungsquerschnitte zu ermitteln gestattet, abgesehen davon, daß die Erhaltungsgrößen (Spin usw.) in jedem Einzelfalle zu untersuchen sind.

Bei der Anlagerung von Nukleonen wird dem Kern A eine Energie von ≈ 8 MeV mitgeteilt. Betrachten wir die Anlagerung komplizierterer Teilchen — von Deuteronen und von α-Teilchen. Für die Anlagerung eines Deuterons ergibt sich:

$$\begin{aligned}\varepsilon_d &= [M_d + M(A, Z) - M(A+2, Z+1)]c^2\\ &= M_d c^2 + [Z M_p + (A - Z) M_n]c^2 - [(Z+1) M_p\\ &\quad + (A - Z + 1) M_n]c^2\\ &\quad - \Delta W(A, Z) + \Delta W(A+2, Z+1)\\ &= M_d c^2 - M_p c^2 - M_n c^2 - \Delta W(A, Z) + \Delta W(A+2, Z+1).\end{aligned}$$

Da

$$M_d c^2 = M_p c^2 + M_n c^2 - \Delta W(2,1)$$

ist, wird

$$\varepsilon_d = \Delta W(A+2,\ Z+1) - \Delta W(A, Z) - \Delta W(2,1);$$

$$\varepsilon_d \approx [(A+2)\cdot 8 - A\cdot 8 - 2{,}23]\ \text{MeV} \approx 14\ \text{MeV}.$$

Außer der kinetischen Energie des Deuterons erhält daher der Compoundkern eine Anregungsenergie von etwa 14 MeV, die um die Translationsenergie zu verringern ist.

Für die Anlagerung von α-Teilchen ergibt eine analoge Abschätzung

$$\varepsilon_\alpha = \Delta W(A+4, Z+2) - \Delta W(A, Z) - \Delta W(4,2);$$

$$\varepsilon_\alpha \approx [(A+4)\cdot 8 - A\cdot 8 - 28{,}2]\ \text{MeV} \approx 4\ \text{MeV}.$$

Für Kernreaktionen lassen sich die Massenbeziehungen in ähnlicher Weise errechnen wie für den Compoundkern. Bezeichnen wir die Teilchen und ihre Massen mit fortlaufenden Ziffern, so erhält man für Zwei-Teilchen-Reaktionen, wenn T deren kinetische Energie bedeutet:

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 \rightarrow \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_4.$$

$$T_3 + T_4 - T_1 = M_1 c^2 + M_2 c^2 - M_3 c^2 - M_4 c^2 = Q \qquad \text{(vgl. Kap. 5.1.)}.$$

Aus Gl. (1.6) folgt:

$$\begin{aligned}M_1(A_1, Z_1)c^2 &= Z_1 M_p c^2 + (A_1 - Z_1) M_n c^2 - \Delta W_1(A_1, Z_1);\\ M_2(A_2, Z_2)c^2 &= Z_2 M_p c^2 + (A_2 - Z_2) M_n c^2 - \Delta W_2(A_2, Z_2);\\ M_3(A_3, Z_3)c^2 &= Z_3 M_p c^2 + (A_3 - Z_3) M_n c^2 - \Delta W_3(A_3, Z_3);\\ M_4(A_4, Z_4)c^2 &= Z_4 M_p c^2 + (A_4 - Z_4) M_n c^2 - \Delta W_4(A_4, Z_4).\end{aligned}$$

Aus der Erhaltung von Ladung und Nukleonenzahl folgt

$$Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4 \quad \text{und} \quad A_1 + A_2 = A_3 + A_4.$$

Man erhält dann aus der Beziehung für Q (Kap. 5.1.)

$$Q = \Delta W_3 + \Delta W_4 - \Delta W_1 - \Delta W_2. \tag{10.1}$$

Nimmt man an, daß A_2 und A_4 leichte, A_1 und A_3 schwere Teilchen sind, so läßt sich die Reaktionsgleichung schreiben:

$$\mathrm{A} + \mathrm{a} \rightarrow \mathrm{B} + \mathrm{b} \quad \text{und} \quad Z + z = (Z + z - y) + y.$$

Für eine grobe Abschätzung kann wie früher die Bindungsenergie für 1 Nukleon zu 8 MeV angenommen werden. Man erhält dann aus Gl. (10.1)

$$Q = \Delta W(A + a - b, Z + z - y) + \Delta W(b, y) - \Delta W(A, Z)$$
$$- \Delta W(a, z);$$

$$Q \approx 8(A + a - b) - 8A + \Delta W(b, y) - \Delta W(a, z);$$

$$Q \approx 8(a - b) + \Delta W(b, y) - \Delta W(a, z).$$

Wenden wir diese Beziehung für einige Reaktionen an:

1. ${}^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \rightarrow {}^3_2\mathrm{He} + \mathrm{n}$

$A = 2, \quad a = 2, \quad b = 1,$
$Z = 1, \quad z = 1, \quad y = 0.$
$\Delta W(3, 2) = 7{,}73$ MeV und $\Delta W(2{,}1) = 2{,}23$ MeV.

Man erhält dann für die Energietönung des Prozesses

$\varepsilon^{\mathrm{n}}_{\mathrm{dd}} = 3{,}27$ MeV.

2. ${}^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \rightarrow {}^3_1\mathrm{H} + \mathrm{p}$

$A = 2, \quad a = 2, \quad b = 1,$
$Z = 1, \quad z = 1, \quad y = 1.$
$\Delta W(3{,}1) = 8{,}48$ MeV;
$\varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{dd}} = 4{,}03$ MeV.

3. Schließlich sei folgender wichtige Prozeß betrachtet:

${}^2_1\mathrm{H} + {}^3_1\mathrm{H} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + \mathrm{n}$
$A = 2, \quad a = 3, \quad b = 1,$
$Z = 1, \quad z = 1, \quad y = 0.$
$\Delta W(4{,}2) = 28{,}3$ MeV;
$\varepsilon^{\mathrm{n}}_{\mathrm{dt}} = 17{,}6$ MeV.

Typen von Kernprozessen

Die bisherigen und die folgenden Betrachtungen beziehen sich lediglich auf qualitative Abschätzungen für die energetischen Möglichkeiten verschiedenartiger Kernprozesse. Die Wahrscheinlichkeit für das reale Auftreten und für die Wirkungsquerschnitte der Kernprozesse sind abhängig von konkreten Aussagen über die Wechselwirkungskräfte und die Konfigurationen der Nukleonen innerhalb des Kerns. Dies wird durch die Annahme verschiedenartiger „Kernmodelle" weiter unten diskutiert werden. Betrachten wir kurz die Energiebilanz einiger wichtiger Kernprozesse.

Reaktionen mit ungeladenen Teilchen

1. (γ, n)-Prozesse

   ${}^2_1H + \gamma \to {}^1_1H + n; \qquad Q = -2{,}23\,\mathrm{MeV}.$

   ${}^9_4Be + \gamma \to {}^8_4Be^* + n; \quad Q = -1{,}67\,\mathrm{MeV}.$

   Für schwerere Kerne wird Q stark negativ.

2. (γ, p)- und (γ, α)-Prozesse

   Wegen der Coulomb-Schwelle sind diese Prozesse stärker endotherm als die (γ, n)-Prozesse.

3. (n, γ)-Prozesse

   Für thermische Neutronen gilt $\sigma(n, \gamma) \sim 1/v$. Zahlreiche Resonanzprozesse treten auf. Die Reaktion führt häufig zu β^--Strahlen, z. B.:

   $${}^{238}_{92}U\,(n, \gamma)\;{}^{239}_{92}U^* \xrightarrow[23\,\mathrm{min}]{\beta^-} {}^{239}_{93}Np^* \xrightarrow[2{,}3\,\mathrm{d}]{\beta^-} {}^{239}_{94}Pu^* \xrightarrow[24\,600\,\mathrm{a}]{\alpha} {}^{235}_{92}U.$$

4. (n, n'). Unelastische Streuung

   Sie dient häufig zur Bestimmung von Energieniveaus.

5. (n, 2n)

   Dieser Prozeß bietet die Möglichkeit, die Bindungsenergie für das äußerste Neutron des Kerns aus der Schwellenenergie des Prozesses zu bestimmen. Aus den kinematischen Beziehungen folgt für den Beginn des Prozesses (Schwellenenergie):

   $$E_3 = \left(-Q + E_{\mathrm{schw.}} \frac{M_2}{M_1 + M_2}\right) \frac{M_4}{M_1 + M_2} = 0.$$

   Da $M_1 = 1$ ist, folgt $Q = E_{\mathrm{schw.}} \dfrac{M_2}{M_2 + 1}$.

   Für den (γ, n)-Prozeß, der in ähnlicher Weise die Bindungsenergie des äußersten Neutrons zu messen gestattet, ist für M_1 zu setzen

   $$M_1 = \frac{h\nu}{c^2}.$$

6. (n, p)- und (n, α)-Prozesse

Für den (n, p)-Prozeß ist die Massenbeziehung:

$$[M(A, Z) + m_n]c^2 = [M(A, Z - 1) + m_p]c^2 + Q.$$

Da $(m_n - m_p)c^2 = 1{,}28$ MeV ist, kann eine positive Energietönung erwartet werden. Da jedoch der Austritt des Protons aus dem Kern durch den Coulomb-Wall behindert wird, sind derartige Reaktionen im allgemeinen erst bei höheren Energien möglich, bei denen die Durchlässigkeit des Potentialwalles (Gamow-Faktor) für einigermaßen geringe kinetische Energien der austretenden Protonen noch hinreichend groß ist.

Im Falle des (n, p)-Prozesses sind Anfangs- und Endkern Isobare, die sich um nur eine Kernladung voneinander unterscheiden. Im allgemeinen sind solche Isobare, wie Tabelle 17 zeigt, nicht stabil, d. h., wenn der Anfangskern stabil ist, wird der Ausgangskern β^--Emission zeigen. Die Energiebilanz hat folgende Form:

1. Stufe: $[M(A, Z) + m_n - M(A, Z - 1) - m_p]c^2 = Q;$

2. Stufe: $[M(A, Z - 1) - M(A, Z) - m_e]c^2 = E_\beta.$

Man erhält aus beiden Beziehungen für Q:

$$Q = (m_n - m_p - m_e)c^2 - E_\beta = 0{,}78 \text{ MeV} - E_\beta.$$

Tabelle 17 zeigt, daß 4 Reaktionen mit positiven Q-Werten vorhanden sind. Diese können mit langsamen Neutronen erzeugt werden, wobei die Reaktion ^{3}He (n, p) ^{3}H für thermische Neutronen einen Wirkungsquerschnitt von etwa 5000 barn besitzt.

Tabelle 17. Energiebilanz einiger (n, p)-Reaktionen

Kernprozeß	Zerfall des Endkerns	Zerfallszeit	β^--Energie MeV	Energietönung MeV
$^3_2$He (n, p) $^3_1$H	β^-	12,4 a	0,0186	+0,76
$^6_3$Li (n, p) $^6_2$He	β^-	0,82 s	3,5	−2,73
$^{10}_5$B (n, p) $^{10}_4$Be	β^-	$2{,}7 \cdot 10^6$ a	0,55	+0,23
$^{14}_7$N (n, p) $^{14}_6$C	β^-	5570 a	0,156	+0,63
$^{23}_{11}$Na (n, p) $^{23}_{10}$Ne	β^-	38 s	4,38	−3,6
^{26}Mg → ^{26}Na	β^-	1,04 s	8,5	−6,08
^{27}Al → ^{27}Mg	β^-	9,45 min	2,61	−1,83
^{35}Cl → ^{35}S	β^-	87 d	0,167	+0,61

Eine Anzahl von (n, α)-Reaktionen ist in Tabelle 18 wiedergegeben. Drei dieser Reaktionen zeigen positive Energietönungen. Von besonderer Bedeutung für den Nachweis langsamer Neutronen sind die beiden Reaktionen ^{6}Li(n, α)^{3}H und ^{10}B(n, α)^{7}Li. Die Endkerne der (n, α)-Reaktionen sind ebenfalls vorwiegend β^--aktiv.

Tabelle 18. Beispiele für (n, α)-Reaktionen

Kernprozeß	Zerfallszeit τ (β^-)	β^--Energie MeV	Energietönung MeV
$^{6}Li \rightarrow {}^{3}H$	12,3 a	0,0186	+4,89
$^{9}Be \rightarrow {}^{6}He$	0,86 s	3,5	−0,6
$^{10}B \rightarrow {}^{7}Li$	stabil		+2,79
$^{11}B \rightarrow {}^{8}Li$	0,841 s	16	−6,63
$^{12}C \rightarrow {}^{9}Be$	stabil		−5,70
$^{14}N \rightarrow {}^{11}B$	stabil		−0,16
$^{15}N \rightarrow {}^{12}B$	0,02 s	13,37	−7,6
$^{16}O \rightarrow {}^{13}C$	stabil		−2,21
$^{17}O \rightarrow {}^{14}C$	5570 a	0,156	+1,85
$^{19}F \rightarrow {}^{16}N$	7,38 s	10,4	−1,54
$^{20}Ne \rightarrow {}^{17}O$	stabil		−0,59

Reaktionen mit geladenen Teilchen

1. (p, γ)-Prozesse
   Beim Einfang eines Protons in einen stabilen Anfangskern wird die Kernladung erhöht, und es resultiert ein β^+-instabiler Kern bis auf wenige Ausnahmen. Umfangreiche Anwendung zur Erzeugung hochenergetischer γ-Strahlung hat der Prozeß ${}^{7}_{3}Li(p, \gamma){}^{8}_{4}Be^* \rightarrow 2\alpha$ gefunden. Er besitzt eine Energietönung von 17,2 MeV.

2. (p, n)-Prozesse
   Der Massenunterschied von Neutron und Proton (1,33 MeV) hat an stabilen Anfangskernen stark endotherme Reaktionen zur Folge. Da der Endkern ein Isobar mit $Z + 1$ ist, kann er nicht stabil sein. Im allgemeinen sind die Endkerne Positronenstrahler oder zeigen Elektroneneinfang. Zur Erzeugung von Neutronen haben die in Tabelle 19 genannten Prozesse Bedeutung.

3. (p, α)-Prozesse
   Der große Massendefekt des α-Teilchens führt zu Reaktionen mit erheblichen Energietönungen. Wegen des Coulomb-Walles finden derartige Reaktionen bei

Tabelle 19. Beispiele für (p, n)-Prozesse

Kernprozeß	Energietönung MeV	E_p an der Schwelle MeV	E_n an der Schwelle MeV
${}^{2}_{1}D \rightarrow 2p$	− 2,22	3,34	0,371
${}^{3}_{1}T \rightarrow {}^{3}_{2}He$	− 0,764	1,02	0,064
${}^{7}_{3}Li \rightarrow {}^{7}_{4}Be$	− 1,64	1,88	0,029
${}^{9}_{4}Be \rightarrow {}^{9}_{5}B$	− 1,85	2,06	0,021
${}^{12}_{6}C \rightarrow {}^{12}_{7}N$	−18,4	20,0	0,118
${}^{19}_{9}F \rightarrow {}^{19}_{10}Ne$	− 3,97	4,18	0,011
${}^{41}_{19}K \rightarrow {}^{41}_{20}Ca$	− 1,22	1,25	0,0007

Protonen nicht zu hoher Energien nur an leichten Kernen statt. Bei schweren Kernen werden hohe Protonenenergien benötigt, und es überwiegt der (p, n)-Prozeß.

Im Laboratorium von RUTHERFORD wurde 1932 von COCKCROFT und WALTON erstmalig eine Reaktion mit künstlich beschleunigten Teilchen durchgeführt:

$$^{7}_{3}\mathrm{Li} + \mathrm{p} \rightarrow {}^{8}_{4}\mathrm{Be}^{*} \rightarrow 2\,\alpha; \qquad Q = 17{,}25\,\mathrm{MeV}.$$

Bereits bei Protonenenergien um etwa 10 keV ist dieser Prozeß beobachtbar.

Bei der Reaktion mit dem Lithiumisotop $^{6}\mathrm{Li}$

$$^{6}_{3}\mathrm{Li} + \mathrm{p} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + {}^{3}\mathrm{He}$$

entsteht neben dem α-Teilchen das leichte Heliumisotop $^{3}\mathrm{He}$.

Einen Zerfall in drei α-Teilchen beobachtet man bei der Reaktion:

$$^{11}_{5}\mathrm{B} + \mathrm{p} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C}^{*} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + {}^{8}\mathrm{Be}^{*} \rightarrow 2\,{}^{4}\mathrm{He}.$$

4. (d, n)-Prozesse

Das Deuteron besitzt eine besonders kleine Bindungsenergie von nur 2,23 MeV bei einem großen Kernradius von etwa 4,3 Fermi. Da die Bindungsenergie für ein Nukleon zwischen 6 und 8 MeV liegt, steht bei derartigen Prozessen für die Anregung des Compoundkerns die hohe Energie von 10 bis 14 MeV zur Verfügung.

Als Neutronenquellen haben (d, n)-Reaktionen hohe Bedeutung gewonnen. Es sind dies in erster Linie die Prozesse

$$^{2}\mathrm{D}\ (\mathrm{d, n})\ {}^{3}\mathrm{He} \quad \text{mit} \quad Q = 3{,}27\,\mathrm{MeV} \text{ und}$$

$$^{3}\mathrm{T}\ (\mathrm{d, n})\ {}^{4}\mathrm{He} \quad \text{mit} \quad Q = 17{,}6\,\mathrm{MeV}.$$

Von weiteren Reaktionen mit hohen Ausbeuten an Neutronen sind zu nennen:

$$^{7}\mathrm{Li}\ (\mathrm{d, n})\ 2\,{}^{4}\mathrm{He} \quad \text{mit} \quad Q = 15{,}0\,\mathrm{MeV} \text{ und}$$

$$^{9}\mathrm{Be}\ (\mathrm{d, n})\ {}^{10}\mathrm{B} \quad \text{mit} \quad Q = 4{,}4\,\mathrm{MeV}.$$

Die beiden letztgenannten Reaktionen liefern jedoch nicht monochromatische Neutronen.

5. (α, n)-Prozesse

Aus den Gleichungen für die Anregung des Compoundkerns folgte für α-Teilchen eine Anregungsenergie von etwa +4 MeV. Diese ist, weil das eintretende α-Teilchen eine verhältnismäßig hohe kinetische Energie besitzen muß, um den Coulomb-Wall überwinden zu können, im allgemeinen so hoch, daß Teilchenemission erfolgen kann. Da die α-Teilchen der radioaktiven Elemente Energien bis zu 8,8 MeV besitzen, sind bei leichteren Elementen erhebliche Neutronenausbeuten zu erreichen. Aus der mit wachsendem Z zu-

nehmenden Höhe des Gamow-Berges folgt, daß Reaktionen mit α-Teilchen im Eingangskanal für schwere Elemente nur mit hohen α-Energien erreichbar sind.

Die Entdeckung des Neutrons durch CHADWICK erfolgte an der Reaktion ${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{12}_{6}\mathrm{C} + \mathrm{n}(+5{,}7\ \mathrm{MeV})$. Diese Reaktion wurde früher vielfach zur Herstellung von Neutronenquellen benutzt und wird auch heute noch gelegentlich dafür verwendet. Berylliumpulver, gemischt mit einem Radiumsalz, oder Polonium dienen als langlebige Neutronenquellen (Po allerdings mit einer Halbwertszeit von etwa 140 Tagen).

6. (α, p)-Prozesse

RUTHERFORD erzielte 1919 mit einem (α, p)-Prozeß

$$ {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{17}_{8}\mathrm{O} + \mathrm{p}\ (-1{,}2\ \mathrm{MeV}) $$

erstmalig eine künstliche Kernumwandlung. Lange Zeit, bis 1932, wurden lediglich durch (α, p)-Prozesse mit natürlichen α-Teilchen Kernreaktionen erzielt. Am Prozeß

$$ {}^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + \mathrm{p}\ \ (+2{,}37\ \mathrm{MeV}) $$

gelang erstmalig die Beobachtung von Resonanzerscheinungen (POSE 1930). Zunächst wurden bei diesen Untersuchungen drei Protonengruppen gefunden (mit Po-α-Strahlen), von denen die energiereichste zum Übergang in den Grundzustand des ${}^{30}\mathrm{Si}$, die anderen zu angeregten Zuständen dieses Kerns führen. Bei späteren Untersuchungen konnten noch drei weitere Protonengruppen mit schwächeren Besetzungszahlen festgestellt werden.

Zum Schluß dieser Systematik einer Anzahl von Kernreaktionen seien solche, die mit schweren Ionen erzielt werden, kurz erwähnt. Die Beschleunigung hochionisierter Strahlen bis etwa zum Eisen gelingt mit Hilfe der modernen Zyklotrons bis zu solchen Energien, daß Kernreaktionen erzielt werden können. Hierbei werden Endkerne erzeugt, die um zahlreiche Masseneinheiten schwerer sind als die Ausgangskerne. Insbesondere sind nach diesem Verfahren „Transurane" hergestellt worden, die derzeit bis zum Element mit $Z = 104$ untersucht worden sind. In Kap. 13.1. wird über derartige Transurane und ihre Zerfallseigenschaften noch einiges Weitere ausgeführt werden.

10.3. Angeregte Kerne und Kernreaktionen

Der Zusammenhang zwischen der Anregungsenergie $\Delta W = E$ komplizierter Kerne und der Temperatur kann nur unter konkreten Vorstellungen über die Wärmebewegung der Nukleonen bestimmt werden. Die Annahme — wobei wir Ausführungen von FRENKEL und FERMI folgen — sei, daß die Nukleonen individuelle Bewegungen im Kern ausführen, ähnlich der Wärmebewegung freier Elektronen in Metallen. Dann läßt sich für nicht zu hohe Temperaturen die Energie W

darstellen als

$$W = W_0 + aT^2; \quad E = aT^2; \quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T} = 2aT. \tag{10.2}$$

a bedeutet einen Proportionalitätsfaktor, der in der Größenordnung von $A k^2/\varepsilon_0$ liegt, wo ε_0 die maximale Energie eines Nukleons im Kern bei der Temperatur $T = 0$ ist, A ist die Anzahl der Nukleonen im Kern und k die Boltzmann-Konstante.

Auf Grund dieser Vorstellungen wurde von LANDAU (1937) folgende Beziehung für die Entropie S des angeregten Kerns gefunden: Aus $\mathrm{d}S/\mathrm{d}E = 1/T$ folgt mit Gl. (10.2)

$$S = 2aT = 2\sqrt{aE}. \tag{10.2a}$$

Die statistische Physik liefert eine Beziehung zwischen der Entropie S und der Anzahl der Zustände eines Systems, in diesem Falle des Kerns, die bei der Energie E eingenommen werden kann:

$$S(E) = k \ln G \qquad \text{(Boltzmann-Gleichung)}.$$

Unter G kann in diesem Falle die Zahl der angeregten Zustände verstanden werden, deren Energien den Betrag E nicht überschreiten, also zwischen 0 und E liegen. Dann erhält man

$$G = \mathrm{e}^{S/k}. \tag{10.3}$$

Durch Differentiation nach E ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}E} = \mathrm{e}^{\frac{S}{k}} \frac{\mathrm{d}S}{k\,\mathrm{d}E} = \frac{1}{kT}\,\mathrm{e}^{\frac{S}{k}}. \tag{10.4}$$

Die linke Seite der Gleichung stellt die Anzahl der verschiedenen Quantenzustände pro Einheit des Energieintervalls dar, also die Dichte der Niveaus im Kern. Der reziproke Wert, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}G = D$, bedeutet dann den mittleren Abstand benachbarter angeregter Niveaus im Energiemaß. Es ist

$$D = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}G} = k\mathrm{e}^{-S/k}. \tag{10.5}$$

Durch Einsetzen von $S = 2aT$ aus Gl. (10.2) erhält man

$$D = kT\mathrm{e}^{-\frac{2aT}{k}} \tag{10.5a}$$

oder mit Gl. (10.1)

$$D = k\sqrt{\frac{E}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\sqrt{aE}}{k}}.$$

Ersetzt man den Faktor a durch $A k^2/\varepsilon_0$, so ergibt sich

$$D = \sqrt{\frac{E\varepsilon_0}{A}}\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{AE}{\varepsilon_0}}}. \tag{10.6}$$

Der mittlere Abstand zweier Kernniveaus sinkt exponentiell mit wachsendem Atomgewicht und wachsender Anregungsenergie. Die Energie ε_0 läßt sich aus der Annahme errechnen, daß die kleinste De-Broglie-Wellenlänge λ im Kern gleich dessen Durchmesser $2R$ ist. Es gilt

$$\lambda = 2R = \frac{h}{mv}$$

und damit

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{2R}\right)^2.$$

Mit $R = 10^{-12}$ cm erhält man $\varepsilon_0 = 2$ MeV. Zur Veranschaulichung der Gl. (10.6) diene das Beispiel $A = 200$, $E = 1$ MeV. Dann wird $E/\varepsilon_0 = {}^1/_2$, der Exponent in Gl. (10.6) nimmt den Wert 20 an, und der Faktor vor der Exponentialfunktion ergibt sich zu 10^5 eV. Demnach wird $D \approx 2 \cdot 10^{-3}$ eV. Entsprechend wird bei einer Anregungsenergie $E = 10^3$ eV der mittlere Abstand benachbarter angeregter Niveaus $D \approx 1700$ eV.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen nur Mittelwerte für die Niveaudichte bei Kernen mit einigermaßen hohen Nukleonenzahlen abschätzen. Im einzelnen können erhebliche Abweichungen auftreten, jedoch geben diese Betrachtungen die Zustände der Kerne bei höheren Anregungsenergien genügend gut wieder.

10.4. Allgemeine Gesetze für das Verhalten von Wirkungsquerschnitten

Die Massenbeziehungen zwischen Target- und Endkern, die zum Zustandekommen einer Reaktion notwendig sind, wurden in Kap. (10.1.) betrachtet. Im folgenden werde im Anschluß an einige Ausführungen von Fermi der qualitative Verlauf der Energieabhängigkeit von Wirkungsquerschnitten bei verschiedenartigen Kernreaktionen diskutiert. Die Kernreaktion sei wiederum durch die symbolische Schreibweise $\mathrm{A} + \mathrm{a} \rightarrow \mathrm{B} + \mathrm{b}$ dargestellt. Nach den Gesetzen der Quantenmechanik wird die Wahrscheinlichkeit für die vorliegende Umwandlung, also die Zahl der Umwandlungsprozesse pro Zeiteinheit, durch die Gleichung

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |H|^2 \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}E} \tag{10.7}$$

bestimmt. H ist das Matrixelement für die Anregung, die den zu betrachtenden Übergang verursacht, $\mathrm{d}n/\mathrm{d}E$ ist die Dichte der Energieniveaus für die Endzustände. Das Matrixelement wird durch die Summe aller Matrixelemente dargestellt, die den Anfangs- mit dem Endzustand verbinden. Von der Betrachtung der Drehimpulse sei abgesehen und lediglich darauf hingewiesen, daß nur solche Matrixelemente ungleich 0 werden, die dem Erhaltungssatz für den Drehimpuls genügen. Für das Kontinuum wird $\mathrm{d}n/\mathrm{d}E = \infty$ und $|H| \rightarrow 0$. Somit wird $|H|^2\, \mathrm{d}n/\mathrm{d}E$ unbestimmt. Die Schwierigkeit läßt sich dadurch beheben, daß man

den unendlich ausgedehnten Raum durch einen Kasten mit dem Volumen V ersetzt. Dann wird $|H|$ klein, aber endlich und $\mathrm{d}n/\mathrm{d}E$ groß, aber endlich. Das Volumen V kann aus dem Endprodukt eliminiert werden.

Es ist nun die Zahl der möglichen Zustände der freien Teilchen, die in das Volumen V eingeschlossen sind und deren Impuls im Intervall p bis $p + \mathrm{d}p$ liegt, zu berechnen. Aus der Unschärferelation folgt, daß für jede Koordinate x, y, z nur Impulse unterscheidbar sind, für die die Beziehungen

$$\Delta p_x \, \Delta q_x \geqq h \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta p_x \geqq \frac{h}{\Delta q_x};$$

$$\Delta p_y \, \Delta q_y \geqq h \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta p_y \geqq \frac{h}{\Delta q_y};$$

$$\Delta p_z \, \Delta q_z \geqq h \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta p_z \geqq \frac{h}{\Delta q_z}$$

gelten. Haben wir ein Volumen $V = a_1 a_2 a_3$, so ist die Zahl der möglichen Zustände gegeben durch

$$\Delta p_x \, \Delta n_1 \, \Delta q_x = h \, \mathrm{d}n_1, \qquad \text{wobei} \qquad \Delta n_1 \, \Delta q_x = a_1;$$

$$\Delta p_y \, \Delta n_2 \, \Delta q_y = h \, \mathrm{d}n_2, \qquad \Delta n_2 \, \Delta q_y = a_2;$$

$$\Delta p_z \, \Delta n_3 \, \Delta q_z = h \, \mathrm{d}n_3, \qquad \Delta n_3 \, \Delta q_z = a_3.$$

Hieraus folgt für die Gesamtzahl der möglichen Zustände im Intervall von p bis $p + \mathrm{d}p$

$$\mathrm{d}n = \frac{V \, \mathrm{d}p_x \, \mathrm{d}p_y \, \mathrm{d}p_z}{h^3} = V \, \frac{4\pi p^2 \, \mathrm{d}p}{h^3}. \tag{10.8}$$

(Diese Zahl ist zu multiplizieren mit der Anzahl der Zustände des Endkerns, die durch die verschiedenen Spinorientierungen bedingt sind.) Um die gesuchte Größe $\mathrm{d}n/\mathrm{d}E$ zu erhalten, bedarf es noch der Bestimmung von $\mathrm{d}E$. Dies geschieht mit Hilfe der relativistischen Beziehung:

$$\mathrm{d}E = v_\mathrm{b} \, \mathrm{d}p_\mathrm{b}.$$

Hier sind v_b und p_b Geschwindigkeit und Impuls im Schwerpunktsystem des Endzustandes B + b. Da im allgemeinen die Masse des Kernes B groß gegenüber der Masse des Teilchens b (oftmals ein Nukleon) ist, kann man v_b und p_b mit hinreichender Genauigkeit als im Laboratoriumssystem gemessene Größen betrachten. (Es sei daran erinnert, daß diese statistischen Betrachtungen nur für große Teilchenzahlen gelten, was annähernd erst bei nicht zu kleinen Nukleonenzahlen, also schweren Kernresten B, erfüllt ist.) Man erhält mit Gl. (10.8)

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}E} = \frac{4\pi p_\mathrm{b}^2 \, V}{h^3 \, v_\mathrm{b}}. \tag{10.9}$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe von Gl. (10.7) die Übergangswahrscheinlichkeit oder Zahl der Übergänge je Zeiteinheit

$$w = \frac{1}{\pi \hbar^4} \frac{p_b^2}{v_b} V \, |H|^2 .$$

Andererseits besteht ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Zahl w der Übergänge pro Zeiteinheit und dem Wirkungsquerschnitt $\sigma_{A \to B}$

$$w = n_a v \sigma_{A \to B} .$$

Hier ist n_a die Dichte der Teilchen a und v die relative Geschwindigkeit dieser Teilchen. Setzt man $n_a = (1/V)\ \mathrm{cm}^{-3}$, als 1 Teilchen im Volumen V, so erhält man

$$\frac{1}{V} v \sigma_{A \to B} = \frac{1}{\pi \hbar^4} \frac{p_b^2}{v_b} V \, |H|^2 .$$

Da die Masse des Kerns A ebenfalls im allgemeinen groß gegen die von a ist, kann v durch v_a, die Geschwindigkeit des Teilchens a im Laboratoriumssystem, ersetzt werden. Man erhält dann

$$\sigma_{A \to B} = \frac{1}{\pi \hbar^4} \, |V H|^2 \, \frac{p_b^2}{v_a v_b} . \tag{10.10}$$

Das Matrixelement zu ermitteln ist im allgemeinen schwierig, und es bedarf konkreter Modellvorstellungen zu seiner Errechnung. Es hat die Form

$$\int d\tau \, \Psi^*_{\mathrm{End}} \, U \, \Psi_{\mathrm{Anf}} .$$

Hierbei ist U die Energie der Wechselwirkung. Wenn die Wellenfunktion auf das Volumen V normiert ist, so verschwindet V aus dem Ausdruck VH. Für H kann man dann schreiben

$$H = \overline{U} \cdot \text{Kernvolumen} \cdot \overline{|\Psi_{\mathrm{Anf}} \, \Psi_{\mathrm{End}}|} .$$

$\overline{|\Psi_{\mathrm{Anf}} \, \Psi_{\mathrm{End}}|}$ ist gemittelt über das Kernvolumen. Außerhalb des Kernes ist $U = 0$. $\overline{U}$ ist die mittlere Wechselwirkungsenergie, die ungefähr gleich der Tiefe der Potentialmulde ist. Für die vorliegenden Zwecke ist es wichtig, die Abhängigkeit von $|H|$ von den elektrischen Ladungen, die bei der Reaktion wirksam sind, mit in Betracht zu ziehen. Wenn die Teilchen positiv geladen sind, so muß die Amplitude ihrer Wellenfunktion am Kern durch Multiplikation mit $\exp(-G/2)$, wo G der Gamow-Faktor ist (vgl. 2.2), verkleinert werden. Die Amplitude der Wellenfunktion des hinausfliegenden Teilchens erhält eine ähnliche Funktion als verkleinernder Faktor. Als Ergebnis erhält man für das Matrixelement:

Neutrale Teilchen $\quad |H|^2 \sim (U \cdot \text{Kernvolumen})^2$,

positiv geladene Teilchen $\quad |H|^2 \sim (U \cdot \text{Kernvolumen})^2 \exp(-G_a - G_b)$.

G_a und G_b sind die Gamow-Faktoren für das Eingangsteilchen a und das Ausgangsteilchen b. Für den Wirkungsquerschnitt erhält man

$$\sigma_{A \to B} \sim |V H|^2 \, \frac{p_b^2}{v_a v_b} . \tag{10.11}$$

Damit läßt sich das Verhalten von Kernreaktionen qualitativ übersehen. Einige charakteristische Beispiele seien im folgenden diskutiert.

Elastische Streuung (n, n)

Es seien beide Teilchen ungeladen, $v_a = v_b$ und daher $p_b^2/v_a v_b = \text{const} = (M_{\text{Neutron}})^2$. Für kleine Energien ist $|H|$ annähernd konstant, also wird außerhalb der Resonanzstellen $\sigma \approx \text{const}$.

Unelastische Streuung (n, n′)

In diesem Falle bleibt der Kern in angeregtem Zustand zurück. Der Prozeß ist endotherm, und $-Q$ ist die Energie, mit der der Kern angeregt wird. Für Energien, die nur wenig oberhalb der Schwelle liegen, ändert sich v_n unwesentlich, es ist also v_n (bzw. v_a) $\approx$ const. Jedoch ändert sich $v_{n'}$ (bzw. v_b) oberhalb des Schwellenwertes der Reaktion sehr rasch; $(v_{n'})^2$ ist proportional der Energie oberhalb des Schwellenwertes. Hieraus folgt:

$$\frac{(p_{n'})^2}{v_{n'} v_n} \approx v_{n'} \sim \sqrt{\text{Energie oberhalb der Schwelle}}.$$

Der Querschnitt wächst demnach oberhalb der Schwelle proportional der Wurzel aus dem Energiebetrag oberhalb der Schwellenenergie (Abb. 43a).

Exotherme Reaktionen

Das auffallende Teilchen sei ein Neutron von nicht hoher Energie. Das hinausfliegende Teilchen b entspreche den Reaktionen (n, p), (n, α) und (n, γ). In derartigen Fällen ist Q von der Größenordnung 1 MeV und die Energie des einfallenden Teilchens ≈ 1 eV. Daher ist v_b annähernd als konstant zu betrachten. Demnach wird $p_b^2/v_a v_b \approx 1/v_a$. Ferner ist bei geladenen Teilchen im Ausgangskanal $|H^2|$ proportional $\exp(-G_n - G_b)$. Hier ist $\exp(-G_b)$ fast konstant und $\exp(-G_n) = 1$. Daher wird $\sigma \sim 1/v$; man erhält das Fermische $(1/v)$-Gesetz.

Eine andere Variante exothermer Reaktionen erhält man, wenn das Teilchen a geladen und das Teilchen b ungeladen ist, also z. B. die Reaktionen (p, n), (α, n), (p, γ). Für Energien, die klein gegenüber der Energietönung Q sind, wird $p_b{}^2/v_a v_b \approx 1/v_a$. In den Ausdruck für σ geht die Durchlässigkeit der Potentialbarriere für das einfallende Teilchen ein, $\exp(-G_a)$. Es wird daher

$$\sigma \approx \frac{1}{v_a} \exp(-G_a) \quad \text{sein (Abb. 43b).}$$

Endotherme Reaktionen

Das hinausfliegende Teilchen sei geladen, das einfliegende ungeladen, z. B. (n, p) oder (n, α). Alle Bedingungen sind gleich denen der unelastischen Streuung von Neutronen, nur ist für das hinausfliegende Teilchen der Faktor $\exp(-G_b)$ von erheblichem Einfluß auf die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes. Daher ist σ proportional der Wurzel aus der Energie oberhalb des Schwellenwertes, multipliziert mit dem Faktor $\exp(-G_b)$. Der Einfluß des letzteren überwiegt, so daß man oberhalb der Schwelle im wesentlichen einen exponentiellen Anstieg erhält (Abb. 43c).

Auf Grund dieser Herleitungen läßt sich der Verlauf des Wirkungsquerschnittes für weitere Reaktionen unschwer abschätzen. Hinsichtlich der Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von der Energie des einfallenden Teilchens dürften die wichtigsten Prozesse dargestellt sein. Eine einigermaßen quantitative Behand-

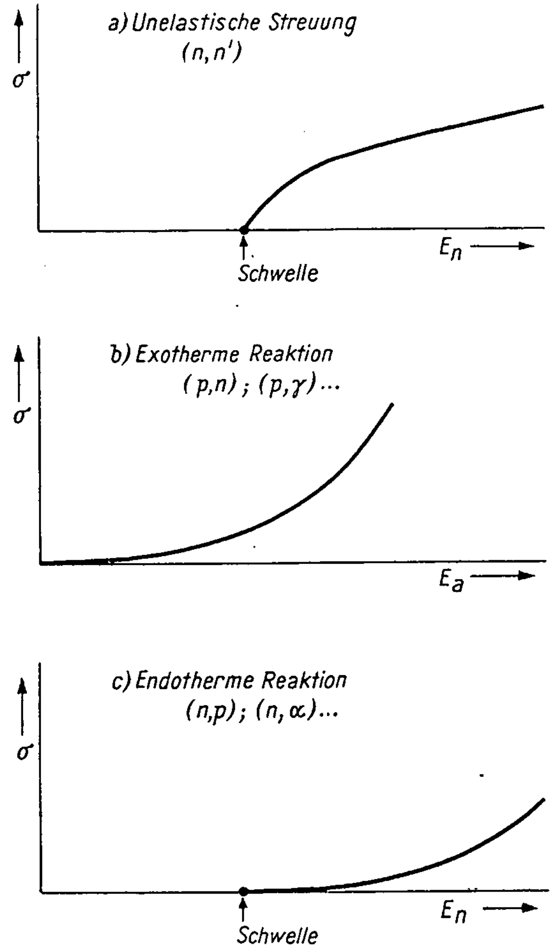


Abb. 43. Verlauf des Wirkungsquerschnitts bei verschiedenartigen Kernreaktionen

lung von Querschnittsproblemen für alle Arten von Kernprozessen setzt sehr umfangreiche und im Laufe der Zeit immer komplizierter werdende Vorstellungen (Modelle) bezüglich des Kernaufbaus voraus. In gleicher Weise kompliziert sich der mathematische Apparat der quantitativen Berechnung des Verlaufes von Wirkungsquerschnitten über einen größeren Bereich von Energien.

11. REAKTIONEN AN SCHWEREN KERNEN

11.1. Mathematische Behandlungsweise

Die Wechselwirkung von Nukleonen und leichten Teilchen mit schweren, aus zahlreichen Nukleonen zusammengesetzten Kernen veranlaßt, je nach Art und Energie der Teilchen, eine Fülle verschiedenartiger Reaktionen. Betrachten wir zunächst, um elektrische Kräfte auszuschalten, die Wechselwirkung von Neutronen mit „komplizierten", d. h. aus einer Anzahl von Nukleonen bestehenden, Kernen. Man beobachtet elastische und unelastische Streuung, Einfang mit nachfolgender γ-Strahlenemission, Emission von geladenen Teilchen usw. Die Theorie der Streuung von Neutronen am Proton muß daher verallgemeinert werden, um die genannten Prozesse erfassen zu können.

Die asymptotische Lösung der Schrödinger-Gleichung ist bereits früher, als Gl. (9.4), angesetzt worden; sie lautete:

$$\psi = e^{ikz} + f(\Theta)\frac{e^{ikz}}{r}.$$

Die einfallende ebene Welle, die den Strom auffallender Teilchen versinnbildlichen soll, läßt sich in folgender Form darstellen:

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\Theta} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,i^l\chi(kr)P_l(\cos\Theta). \tag{11.1}$$

Symmetrisch zur z-Achse läßt sich die Lösung der Schrödinger-Gleichung folgendermaßen schreiben:

$$\psi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}A_l(2l+1)\,i^l\,\chi(kr)P_l(\cos\Theta). \tag{11.2}$$

A_l sind die Koeffizienten der Reihenentwicklung, $\chi_l(kr)$ die Partiallösungen der entsprechenden Radialgleichungen:

$$\frac{d^2\chi_l}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\chi_l}{dr} + \frac{2M}{\hbar^2}\left\{E - V(r) - \frac{\hbar}{2M}\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}\chi_l = 0. \tag{11.3}$$

Wenn das Kernpotential mit wachsendem Abstand stärker als mit $1/r$ abnimmt, so stellt die Funktion χ eine einlaufende und (für große r) eine aus dem Kern aus-

laufende Welle dar (vgl. Anhang II):

$$\chi_l(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{r}\cos\left(kr - \frac{l+1}{2}\pi\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2r}\left[e^{i\left(kr - \frac{l+1}{2}\pi\right)} + e^{-i\left(kr - \frac{l+1}{2}\pi\right)}\right]. \tag{11.4}$$

Bei elastischer Streuung sind die Amplituden beider Wellen gleich groß. Im Falle unelastischer Streuung ist die auslaufende Welle schwächer als die einlaufende. Sie unterscheiden sich demnach durch ihre Amplituden; es wird

$$\chi_l(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2r}\left[\eta_l e^{i\left(kr - \frac{l+1}{2}\pi\right)} + e^{-i\left(kr - \frac{l+1}{2}\pi\right)}\right]. \tag{11.5}$$

η_l ist eine komplexe Größe mit einem Modul kleiner als eins, wenn der Kern einfallende Teilchen zu absorbieren in der Lage ist. Die uns interessierende Streuwelle ist gegeben durch

$$f(\Theta)\frac{e^{ikr}}{r} = \psi e^{ikz} = \frac{1}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,P_l(\cos\Theta)\,i^l$$

$$\times\left\{A_l\left[\eta_l\,e^{i\left(kr - \frac{l+1}{2}\pi\right)} + e^{-i\left(kr - \frac{l+1}{2}\pi\right)}\right] - \left[e^{i\left(kr - \frac{l+1}{2}\pi\right)} - e^{-i\left(kr - \frac{l+1}{2}\pi\right)}\right]\right\}. \tag{11.6}$$

Die Funktion e^{-ikr} darf in der Differenz „gesamte Welle ψ minus einfallende Welle" nicht auftreten. Daher wird $A_l = 1$. Man erhält dann für die Streuwelle

$$f(\Theta)\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,(\eta_l - 1)P_l\,(\cos\Theta)\,i^l e^{i\left(kr - \frac{l+1}{2}\pi\right)}.$$

Da $i^l = e^{i\frac{\pi}{2}l}$ ist, erhält man

$$f(\Theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,(\eta_l - 1)P_l\,(\cos\Theta). \tag{11.7}$$

Im Falle elastischer Streuung wird $|\eta_l| = 1$. Setzt man $\eta_l = e^{2i\delta_l}$, so wird

$$f(\Theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,(e^{2i\delta_l} - 1)P_l\,(\cos\Theta). \tag{11.7a}$$

Dies ist die Beziehung für $f(\Theta)$ bei einer Streuwelle (Gl. 9.4). Der differentielle Streuquerschnitt $d\sigma_s$ ist

$$d\sigma_s = |f(\Theta)|^2\, 2\pi \sin\Theta\, d\Theta$$

und errechnet sich zu

$$d\sigma_s = \frac{\pi}{2k^2}\left|\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,(\eta_l - 1)P_l\,(\cos\Theta)\right|^2 \sin\Theta\, d\Theta. \tag{11.8}$$

Für den totalen Streuquerschnitt ergibt sich

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\,|1-\eta_l|^2. \tag{11.9}$$

Die partielle Streuung für nur einen Wert von l liefert den Streuquerschnitt

$$\sigma_{sl} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1)\,|1-\eta_l|^2. \tag{11.9a}$$

Der Streuquerschnitt für unelastische Streuung läßt sich folgendermaßen bestimmen: In Gl. (11.5) ist die einlaufende Welle dargestellt durch $e^{-i\left(kr - \frac{l+1}{2}\pi\right)}$, die auslaufende durch $\eta_l e^{+i\left(kr - \frac{l+1}{2}\pi\right)}$ und die entsprechenden Intensitäten durch die Quadrate der absoluten Beträge dieser Funktionen. Die Differenz $1 - |\eta_l|^2$ bestimmt daher die Intensitätsabnahme der einfallenden Welle — des einfallenden Teilchenstromes — durch die unelastischen Verluste. Der totale unelastische Streuquerschnitt lautet daher

$$\sigma_{rl} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1)\,(1-|\eta_l|^2). \tag{11.10}$$

Der gesamte effektive Querschnitt, $\sigma = \sigma_s + \sigma_r$, wird dann

$$\left\{\begin{aligned} \sigma &= \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\,\{|1-(\eta_l)|^2 + 1 - |\eta_l|^2\} \\ &= \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\,\bigl(1 + \mathrm{Re}(\eta_l)\bigr). \end{aligned}\right. \tag{11.11}$$

Man erhält also für die verschiedenen Vorgänge von Streuung und Absorption

$$\sigma_{sl} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1)\,|1-\eta_l|^2;$$

$$\sigma_{rl} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1)\,(1-|\eta_l|^2);$$

$$\sigma_{tot} = \frac{2\pi}{k^2} (2l+1)\,[1 - \mathrm{Re}\,(\eta_l)].$$

Diese Gleichungen zeigen, daß jeder Absorptionsprozeß mit elastischer Streuung verbunden ist. σ_s kann nur Null werden, wenn $\eta_l = 1$ wird. Dann wird aber auch $\sigma_r = 0$. Ein völlig „schwarzer" Körper mit dem Radius R wird alle ihn treffenden Teilchen absorbieren. Für alle Partialwellen mit $l \leqq l_{max}$ wird die Amplitude $\eta_l = 0$, für alle $l > l_{max}$ wird $\eta_l = 1$. Aus der Beziehung $pR = l\hbar$ folgt für l_{max}

$$l_{max} \approx R\,\frac{p}{\hbar} = \frac{R}{\lambdabar}.$$

Es folgt:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sum_{l \leq l_{\max}} 2\pi\lambda\!\!\!^-{}^2 (2l + 1) \approx 2\pi R^2$$

und

$$\sigma_s = \sigma_r \approx \pi r^2 .$$

Der totale Wirkungsquerschnitt in diesem (klassischen) Spezialfall ist gleich dem doppelten geometrischen Querschnitt des schwarzen Absorbers.

Dieses einfache Bild der Streuung ähnelt dem der Lichtbeugung. Bei klassischer Betrachtung ist der absorbierende Kern als Kugel vom Radius R darzustellen, die einen Schatten wirft. Die Vorstellungen der Wellenoptik lassen dieses Resultat so deuten, daß in der Vorwärtsrichtung ebensoviel Licht gestreut wird, wie von dem schwarzen Körper absorbiert wird. Der Wirkungsquerschnitt für die Beugungsstreuung — Diffraktionsstreuung — ist daher πR^2. Um außerhalb der Kugel Licht zu absorbieren, muß die Energie der durch Beugung gestreuten Strahlung dieselbe sein wie die der einfallenden Strahlung, d. h., die Streuung muß elastisch sein. Nach elementaren Betrachtungen in der Wellenoptik ist der Beugungswinkel im Mittel bestimmt durch $\lambda\!\!\!^-/r$. Für $\lambda\!\!\!^- \ll R$ ist die Beugung an (makroskopischen) Objekten so gering, daß sie schwer zu messen ist. Im Falle der Kernstreuung liegt für Teilchen von einigen MeV Energie $\lambda\!\!\!^-/R$ in der Größenordnung von 1/4. Der Schlagschatten ist also nur kurz und kann, da die Beobachtung immer in großem Abstand vom Kern stattfindet, nicht gemessen werden. Die elastische Beugungsstreuung ist daher nur durch Messungen der Winkelverteilung bei der Streuung (unter sehr kleinen Winkeln zum Primärstrahl) festzustellen. Die Beugungsstreuung ist experimentell bestätigt worden, und es ist auch gelungen, mehrere Maxima und Minima bei der Streuung unter sehr kleinen Winkeln festzustellen. Bei einem nicht schwarzen, sondern „grauen" Streuer und in anderen Fällen ist die Diffraktionsstreuung ebenfalls vorhanden, doch ist ihr totaler Querschnitt nicht dem Querschnitt des Streuers gleich.

Für S-Streuung, $l = 0$, erhält man aus Gl. (11.9)

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} |1 - \eta_0|^2 .$$

Mit $\eta_l = e^{2i\delta_l}$ ergibt sich: $\sigma = \dfrac{\pi}{k^2} |1 - e^{2i\delta_l}|^2$ und daraus wie in Gl. (9.8) bzw. (9.7)

$$\sigma_{s\,l=0} = 4\pi\lambda\!\!\!^-{}^2 \sin^2 \delta_l . \tag{11.12}$$

11.2. Resonanzerscheinungen

Bei der Beobachtung und Messung von Wirkungsquerschnitten treten häufig gut ausgeprägte Maxima mit geringer Halbwertsbreite auf. Die Maxima werden als Resonanzmaxima bezeichnet. Neutronen, Protonen und α-Teilchen zeigen Resonanzen, insbesondere bei Atomkernen mittlerer und hoher Nukleonenzahl.

Die Entdeckung derartiger Erscheinungen gelang erstmalig bei (α, p)-Prozessen 1929 durch H. POSE, bei Neutronenreaktionen wurden von HAFSTAD und TUVE 1935 Resonanzprozesse gefunden und analysiert.

Die Theorie der Resonanzprozesse wurde von BREIT und WIGNER entwickelt. Unter vereinfachenden Annahmen (geringe Energien und S-Streuung) sollen die Ergebnisse dieser Erscheinungen auf der Grundlage der Streutheorie umrissen werden.

Die Schrödinger-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{M}{\hbar^2}\big(E - V(r)\big)\, u = 0 \tag{11.13}$$

führt für $r \to \infty$ zu der Lösung

$$u_l(r) \to B \sin\left(kr + \delta_l - l\frac{\pi}{2}\right).$$

Bei geringen Energien $E \approx 0$ und $r \to \infty$ nimmt die Gleichung die einfache Form $\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}r^2 = 0$ an, deren Lösung in der Form $u_0(r) = C(1 - r/a)$ darstellbar ist. Für $r = a$ wird $u_0(r) = 0$; a ist die Streuweglänge. Für S-Streuung ergibt sich dann

$$u_0(r) = B\sin(kr + \delta_0) = C\left(1 - \frac{r}{a}\right) = B[\sin kr \cos\delta_0 + \sin\delta_0 \cos kr]. \tag{11.14}$$

Für kleine Energien, also kleine k-Werte erhält man

$$B(kr\cos\delta_0 + \sin\delta_0) = C\left(1 - \frac{r}{a}\right).$$

Durch Vergleich der Glieder mit gleichen Potenzen von r ergibt sich

$$\tan\delta_0 = -ka. \tag{11.15}$$

Den Phasenwinkel δ_0 kann man aus der Amplitude η_0 der auslaufenden Welle berechnen. Mit $\eta_0 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_0}$ erhält man

$$\eta_0 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_0} = (\cos\delta_0 + \mathrm{i}\sin\delta_0)^2.$$

Nach Umformung der Cosinus- und Sinusfunktionen in Tangensfunktionen erhält man unter Anwendung von Gl. (11.15)

$$\eta_0 = \frac{1 - \mathrm{i}\,ka}{1 + \mathrm{i}\,ka}.$$

Mit Gl. (11.10) läßt sich der Wirkungsquerschnitt durch die Streuweglänge a ausdrücken. Unter Verwendung von Gl. (11.9a) erhält man

$$|1 - \eta_0|^2 = \frac{4k^2}{\left|\frac{1}{a} + \mathrm{i}k\right|^2} \quad \text{und} \quad 1 - |\eta_0|^2 = \frac{4k\,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{a}\right)}{\left|\frac{1}{a} + \mathrm{i}k\right|^2}.$$

Für die Wirkungsquerschnitte ergibt sich dann

$$\left.\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\pi}{k^2}\,|1-\eta_0|^2 = \frac{4\pi}{\left|\frac{1}{a}+\mathrm{i}k\right|^2}; \\ \sigma_r &= \frac{\pi}{k^2}\,(1-|\eta_0|^2) = 4\pi\lambda\!\!\!^{-}\,\frac{\operatorname{Im}\left(\frac{1}{a}\right)}{\left|\frac{1}{a}+\mathrm{i}k\right|^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.16)$$

Wenn die Länge a reell ist, wird $\sigma_r = 0$, und für σ_s erhält man

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2}\,\frac{1}{1+\cot^2\delta_0} = \frac{4\pi}{k^2+\frac{1}{a^2}} = 4\pi\lambda\!\!\!^{-2}\sin^2\delta_0.$$

Es sei zunächst die elastische Streuung mit $\sigma_r = 0$ betrachtet. $a(k)$ ist in diesem Falle reell und Funktion von k, also der Energie, da $k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2ME}$ ist. σ_s hat ein Maximum für $[a(k)]^{-1} = 0$, und es wird das Verhalten von σ_s in der Umgebung von $[a(E_0)]^{-1} = 0$ betrachtet. Die Reihenentwicklung ergibt unter Abbruch nach dem ersten Glied

$$\frac{1}{a(E)} = 0 + (E-E_0)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\left(\frac{1}{a}\right)_{E_0} + \cdots.$$

Führt man die Größe

$$\frac{1}{2}\,\Gamma_s = \frac{k}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\left(\frac{1}{a}\right)_{E_0}}$$

ein, so erhält man

$$\sigma_s = \frac{\pi\lambda\!\!\!^{-2}\,\Gamma_s}{\frac{\Gamma_s}{4}+(E-E_0)^2}.$$

Da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\left(\frac{1}{a}\right)_{E_0}$ konstant ist (Maximum), ist Γ_s proportional k. Für $E = E_0$, den Resonanzeffekt, ergibt sich

$$\sigma_s = 4\pi\lambda\!\!\!^{-2}. \qquad (11.16\text{a})$$

Für Resonanzen im Bereich geringer Energien, also großer $\lambda\!\!\!^{-}$, kann σ_s sehr hohe Werte annehmen. Die Bedeutung von Γ_s ergibt sich aus der Gleichung für σ_s. Für $E - E_0 = \Gamma_s/2$ erhält man $\sigma_s = 2\pi\lambda\!\!\!^{-2}$, also den halben Wert des Maximums. $\Gamma_s/2$ ist daher die energetische Halbwertsbreite für das Resonanzmaximum. (Eine geringe Änderung von $\lambda\!\!\!^{-}$ mit E ist hierbei vernachlässigt.)

Unter den gleichen vereinfachenden Annahmen sei der Prozeß gleichzeitigen Auftretens von Streuung und Absorption betrachtet. $a(E)$ soll eine komplexe Größe sein. E_0 wird dann im allgemeinen komplex und sei dargestellt durch

$$E_0 = \varepsilon_0 - \frac{\mathrm{i}\Gamma_r}{2}. \tag{11.17}$$

Wiederum wird $1/a$ in eine Reihe entwickelt; alle höheren Glieder werden weggelassen. Für den Real- bzw. den Imaginärteil erhält man:

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\left(\frac{1}{a}\right)_{E_0}\right] = +\frac{2k}{\Gamma_s}; \quad \mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\left(\frac{1}{a}\right)_{E_0}\right] = ka.$$

Für reelle E ergibt sich

$$\mathrm{Im}\left[\frac{1}{a(E)}\right] = k\left[\frac{\Gamma_r}{\Gamma_s} + \alpha(E - E_0)\right];$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{a(E)}\right] = \frac{2k}{\Gamma_s}\left[E - \left(\varepsilon_0 + \frac{\alpha\Gamma_r\Gamma_s}{4}\right)\right].$$

Mit Hilfe von Gl. (11.17) erhält man

$$\frac{1}{a} = \left[E - \varepsilon_0 + \mathrm{i}\,\frac{\Gamma_r}{2}\right]\left[\frac{2k}{\Gamma_s} + \mathrm{i}k\alpha\right] =$$

$$= \frac{2k}{\Gamma_s}\left[E - \varepsilon_0 - \frac{\alpha\Gamma_s\Gamma_r}{4}\right] + \mathrm{i}k\left[\frac{\Gamma_r}{\Gamma_s} + \alpha\,(E - \varepsilon_0)\right].$$

Mit $E_r = \varepsilon_0 + \alpha\,\frac{\Gamma_s\Gamma_r}{4}$ und unter Vernachlässigung von $\alpha[E - \varepsilon_0]$ folgt

$$\frac{1}{a} = \frac{k}{\Gamma_s}\{2(E - E_r) + \mathrm{i}k\Gamma_r\}.$$

Mit Gl. (11.16) ergeben sich dann die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_s &= \pi\lambda\!\!\!^{-2}\left[\frac{\Gamma_s^2}{\frac{1}{4}(\Gamma_s + \Gamma_r)^2 + (E - E_r)^2}\right]; \\ \sigma_r &= \pi\lambda\!\!\!^{-2}\left[\frac{\Gamma_r\Gamma_s}{\frac{1}{4}(\Gamma_s + \Gamma_r)^2 + (E - E_r)^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{11.18}$$

$$E_r = \varepsilon_0 + \Delta; \quad \Delta = \frac{\alpha\Gamma_s\Gamma_r}{4}.$$

Diese Beziehungen für die Wirkungsquerschnitte sind denen für den elastischen Fall sehr ähnlich. Jedoch ist nun die Resonanzbreite durch $\Gamma = \Gamma_s + \Gamma_r$ gegeben,

sie wird demnach größer als bei rein elastischer Streuung. Weiterhin wird das Resonanzmaximum E_r proportional zu den Resonanzbreiten Γ_s und Γ_r um den Betrag Δ verschoben.

Die Gleichungen (11.18) für die Querschnitte seien an einigen Beispielen diskutiert. Von besonderem Interesse ist der (n, γ)-Prozeß für Neutronen geringer Energien. Bei hinreichend kleinen Energien folgt wie bei der Herleitung von Gl. (11.16a), daß Γ_s proportional zu k, also zu $\sqrt{E}$, wird. Bei schweren Kernen ist der Streuquerschnitt klein gegenüber dem Einfangquerschnitt, so daß $\Gamma_s + \Gamma_r \approx \Gamma_r = \Gamma$ wird. Berechnet man unter diesen Voraussetzungen den Reaktionsquerschnitt aus Gl. (11.18) und setzt ihn in Beziehung zum Betrag dieses Querschnittes im Falle der Resonanz, $E = E_r$, so erhält man

$$\sigma_r\,(\text{Res}) \approx 4\pi\lambda\!\!\!^{-2}_{\text{Res}}\,\frac{\Gamma\Gamma_s\sqrt{\dfrac{E_r}{E}}}{\Gamma^2}\,;$$

$$\frac{\Gamma_s\,(\text{Res})}{\Gamma_s} = \sqrt{\frac{E_r}{E}}$$

und

$$\sigma \approx 4\pi\lambda\!\!\!^{-2}\,\frac{\Gamma\Gamma_s}{\frac{1}{4}\,\Gamma^2 + (E - E_r)^2},$$

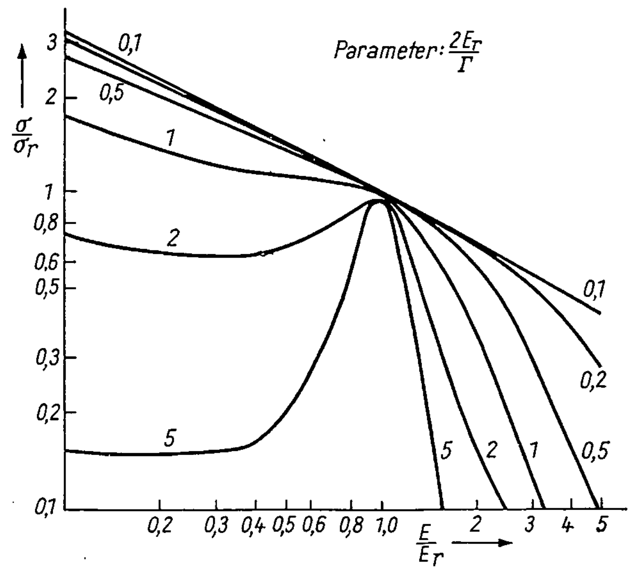


Abb. 44. σ/σ_r für verschiedene Werte des Parameters $2E_r/\Gamma$

also

$$\sigma = \sigma_{\text{res}} \sqrt{\frac{|E_r|}{E}} \frac{\frac{1}{4}\Gamma^2}{\frac{1}{4}\Gamma^2 + (E - E_r)^2} = \sigma_{\text{res}} \sqrt{\frac{|E_r|}{E}} \frac{1}{1 + \left(\frac{2E_r}{\Gamma}\right)^2 \left(\frac{E}{E_r} - 1\right)^2}. \tag{11.19}$$

Für E_r ist $|E_r|$ geschrieben, da auch kleine negative Werte möglich sind. Der Betrag des Verhältnisses E_r/Γ bestimmt den Verlauf des Wirkungsquerschnittes

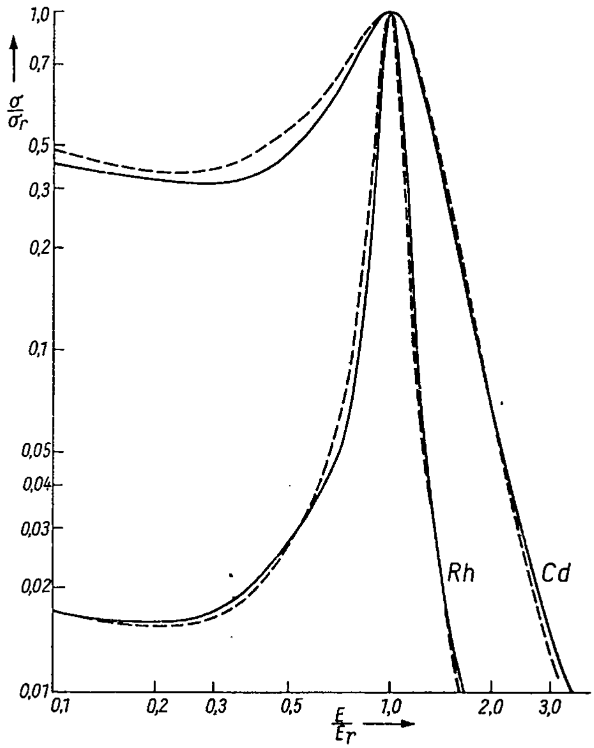


Abb. 45. σ/σ_r für Cadmium und Rhenium
Durchgezogene Kurven theoretisch, gestrichelte experimentell ermittelt

mit der Energie. Ist $E_r/\Gamma \gg 1$, so erhält man von kleinen zu großen Energien hin einen monotonen Abfall der (σ/σ_r)-Werte. Abbildung 44 zeigt den Verlauf der Wirkungsquerschnitte für einige Werte des Parameters $2E_r/\Gamma$. Man erkennt, daß mit wachsendem Betrag des Parameters die Resonanz immer ausgeprägter wird. Sehr schön läßt sich die weitgehende Richtigkeit der theoretischen Ergebnisse am Verlauf des (n, γ)-Prozesses für Cadmium zeigen (Abb. 45). Der Verlauf des Wirkungsquerschnittes entspricht dem Wert von $2E_r/\Gamma \approx 3$.

Ist $E \ll |E_r|$, so wird der Nenner in Gl. (11.19) unabhängig von E, und man erhält die Beziehung $\sigma_{n,\gamma} \sim 1/\sqrt{E} \sim 1/v$, die Fermische Beziehung für (n, γ)-Prozesse, bekannt als $(1/v)$-Gesetz. Die Beziehungen (11.19) für Resonanzen im S-Zustand wurden unter einigen Vernachlässigungen errechnet. Wegen der Vernachlässigung höherer Glieder in der Reihenentwicklung von $1/a$ beschreiben unsere Betrachtungen die Energieabhängigkeit für die Querschnitte nur in der Umgebung der Resonanzstellen. Auch wenn weitere Resonanzstellen existieren, stimmt die Theorie befriedigend mit den experimentellen Ergebnissen überein, sofern diese Stellen von der betrachteten hinreichend großen Abstand haben. Daher lassen sich zahlreiche Züge des Querschnittsverlaufes in Abhängigkeit von der Energie, teilweise mit großer Genauigkeit, wiedergeben.

11.3. Direkte Kernreaktionen

Nicht alle Kernreaktionen sind durch die Bohrsche Vorstellung der Bildung eines Compoundkernes zu erfassen. Nicht nur bei sehr hohen Energien (> 100 MeV), sondern bereits im Bereich geringerer Energien (≈ 14 MeV und weniger) gibt es erhebliche Abweichungen von den theoretischen Ergebnissen, die auf der Annahme der Bildung eines Compoundkernes beruhen. Diese Abweichungen äußern sich im Verlauf der Energieabhängigkeit von Wirkungsquerschnitten und der Winkelverteilung bei der Streuung und anderen Reaktionen. Vielmehr kommt man durch Vergleich mit dem Reaktionsmechanismus über einen Compoundkern zu der Vorstellung, daß das auf den Kern treffende Nukleon nicht in den Kern eingefügt wird und dort, den Kern „aufheizend", lange Zeit verbleibt, sondern daß die Möglichkeit des Zusammenstoßes des Nukleons mit einem am Kernrande gelegenen Nukleon oder einer Gruppe von Nukleonen erfolgt, ohne daß der gesamte Kern an der Reaktion teilnimmt. In diesem Falle würde man bei nicht zu hohen Energien — im Gegensatz zur Compoundkern-Reaktion, die beispielsweise bei (n, n)- oder (n, n')-Prozessen eine isotrope Richtungsverteilung der gestreuten Teilchen erwarten läßt — eine bevorzugte Vorwärts- und Rückwärtsstreuung erhalten.

Mit einiger Vorsicht, die bei allen bildlichen Veranschaulichungen atomarer Prozesse geboten ist, kann der Mechanismus einer direkten Reaktion durch Abb. 46 ein wenig verdeutlicht werden. Betrachten wir einen Kern, dessen Radius etwa 10^{-12} cm beträgt. Mit der Gleichung

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E^2 + 2\,mc^2 E}} = \frac{1{,}24 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{E^2 + 2\,mc^2 E}}$$

erhalten wir für ein Neutron von 1 MeV Energie eine Wellenlänge von $\lambda \approx 3 \cdot 10^{-12}$ cm, die also größer als der Kern ist. Demnach kann der das Teilchen charakterisierende Wellenzug, dessen Energie proportional der (Amplitude)^2 ist, mit dem Kern als Ganzem in Wechselwirkung treten und ihm seine Energie übertragen. Ist, wie im oberen Teil der Abb. 46 gezeigt wird, die Energie des Teilchens

größer, also z. B. 100 MeV, so wird $\lambda \approx 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm, also wesentlich kürzer als der Kerndurchmesser. In diesem Falle wird bereits an der Oberfläche des Kerns ein großer Teil der Energie des einfallenden Teilchens absorbiert werden können und damit an einzelne Nukleonen oder Gruppen von Nukleonen übergehen.

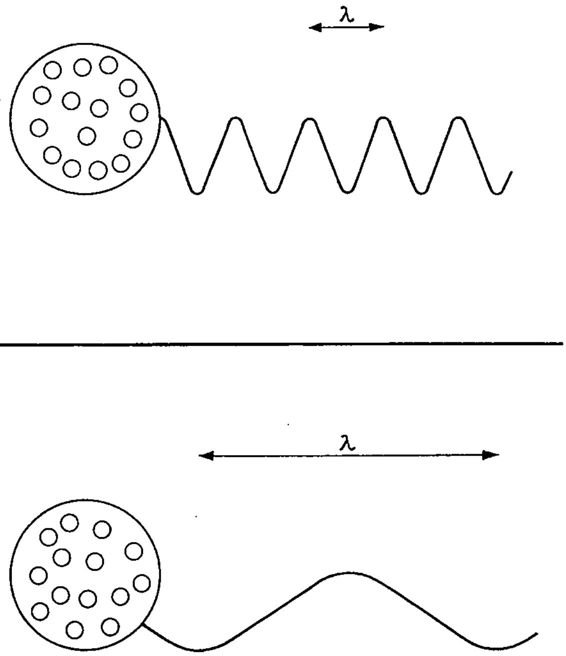


Abb. 46. Veranschaulichung der Wechselwirkung von Teilchen geringer Energie (λ groß) und hoher Energie (λ klein) mit Kernen

Zu den bekanntesten Reaktionen dieser Art zählt die „Strippingreaktion“ mit Deuteronen als Geschossen, die schon lange (Oppenheimer und Phillips) bekannt ist. Diese Reaktion beruht auf den besonderen Eigenschaften des Deuterons, daß die Bindungsenergie seiner beiden Nukleonen sehr gering ist ($\approx 2{,}22$ MeV) und ihr Abstand verhältnismäßig groß, nämlich etwa $4 \cdot 10^{-13}$ cm. Abbildung 47 illustriert eine Strippingreaktion. Wenn das Deuteron sich dem Kern nähert, gelangt infolge des großen Abstandes d seiner beiden Nukleonen voneinander ein Nukleon wesentlich näher an den Kern und kann wegen der geringen Bindungsenergie des Deuterons leichter eingefangen werden als das weiter entfernte Nukleon, das, ohne an der Reaktion teilzunehmen, weiterfliegt. Insbesondere bei geringen Energien der Neutronen wird häufig das Proton des Deuterons von der positiven Ladung des Kerns abgestoßen, somit das Deuteron unter dem Einfluß der Coulomb-Kräfte zerlegt und das Neutron in den Kern eingefangen. Es ist nicht notwendig, daß bei Deuteronen immer eine Strippingreaktion stattfindet, es kann vielmehr, wenn die energetischen Verhältnisse und die Erhaltungssätze es zulassen, das

Deuteron als Ganzes eingefangen werden und einen hochangeregten Zwischenkern bilden.

Aus unseren früheren Betrachtungen (Kap. 10.2.) läßt sich die Energie, die ein Deuteron an den Zwischenkern abgibt, leicht abschätzen. Nach Gl. (1.6) ist die Bindungsenergie ε_d des Deuterons an einen Zwischenkern

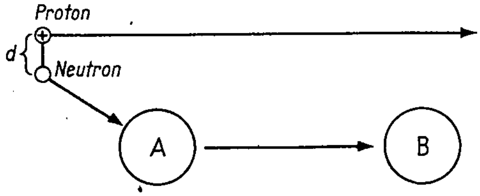


Abb. 47. Schema eines Oppenheimer-Phillips-Prozesses

$$\varepsilon_d = [M_\alpha + M(A-2, Z-1) - M(A, Z)]c^2 =$$
$$= \Delta W(A, Z) - \Delta W(A-2, Z-1) - \Delta W_\alpha,$$

und es wird

$$\varepsilon_d \approx [8A - (A-2)\,8 - 2{,}22]\,\text{MeV} \approx 14\,\text{MeV}.$$

Zu dieser Bindungsenergie ist noch die kinetische Energie, mit der das Deuteron auf den Kern geschossen wird, zu addieren, so daß eine sehr hohe Anregungsenergie resultiert. Alle Reaktionen mit Deuteronen als Geschossen haben daher Energietönungen $Q > 0$. Die früher behandelte (d, d)-Reaktion und die (d, t)-Reaktion zeigen hohe Q-Werte.

Die Reaktionen mit Deuteronen als Geschossen können demnach sowohl unter Bildung eines Compoundkernes als auch als (d, p)- oder (d, n)-Reaktionen vor sich gehen, wobei der Compoundkern, solange er bei nicht zu hohen Einfallsenergien zustande kommt, nur durch den Einbau eines der Nukleonen des Deuterons entsteht. Der Effekt einer Polarisation des Deuterons durch die Coulomb-Kräfte zwischen dem Proton und dem Kern wird um so geringer sein, je höher die kinetische Energie der Deuteronen wird. In diesem Falle wird, wie die Beobachtung zeigt, die Energie des am Kern vorbeifliegenden Nukleons $T_r = \frac{T_d}{2}$, und das Nukleon wird nur in einem kleinen Bereich in der Vorwärtsrichtung beobachtet. Dieser Reaktionstyp wurde theoretisch bereits am Anfang der fünfziger Jahre, insbesondere durch S. T. Butler, eingehend untersucht.

12. KERNMODELLE

Die Tatsache, daß es mehrere Kernmodelle gibt, beweist, daß eine einheitliche Theorie der Atomkerne derzeit nicht existiert. In großen Zügen läßt sich zwischen Einteilchenmodellen und Mehrteilchenmodellen unterscheiden. Bei den ersteren sind die Nukleonen an bestimmte, energetische und durch weitere Parameter definierte Lagen gebunden. Ein Beispiel für die Einteilchenmodelle ist das Schalenmodell, das auf ähnlichen Vorstellungen basiert, wie sie für die Elektronenhüllen der Atome verwendet werden. Mehrteilchenmodelle, die auf statistischen Vorstellungen beruhen, sind das „Fermi-Gas-Modell" und das „optische Modell". Schließlich sei das verallgemeinerte Kernmodell genannt, das gemeinsame Züge des Compound-Modells und des Schalenmodells zeigt und eine Reihe weiterer Eigenschaften, bezüglich derer auf die zahlreichen Monographien dieses Gebietes hingewiesen sei. Im Rahmen der im vorliegenden Buch beabsichtigten Übersicht können nur einige Hauptzüge wichtiger Kernmodelle berührt werden.

12.1. Modell von THOMAS und FERMI (Fermi-Gas-Modell)

Einige Eigenschaften dieses Modells wurden bereits in Kap. 10.2. angeführt. Gleichung 10.8 ergab für die Zahl der möglichen Zustände freier Teilchen im Volumen V, die Impulse von p bis $p + \mathrm{d}p$ besitzen, folgenden Ausdruck:

$$\mathrm{d}n = \frac{4\pi p_{\mathrm{b}}^2 \mathrm{d}p_{\mathrm{b}}}{h^3} V.$$

Im Kern können sowohl Neutronen als auch Protonen vorhanden sein, die verschiedenartige Teilchen oder Nukleonen mit verschiedenen Vorzeichen der Komponente T_3 des Isospins sind. Weiterhin besitzen die Nukleonen Spins, die in zwei verschiedenen Orientierungen vorhanden sein können. Demzufolge können sich im gleichen Impulszustand je 2 Neutronen und 2 Protonen mit antiparallelen Spins befinden. Es ist daher die Zahl der durch Gl. (10.8) gegebenen Zustände für Nukleonen beider Typen um den Faktor 4 zu vergrößern:

$$\mathrm{d}n = 4\,V \frac{4\pi p^2 \mathrm{d}p}{h^3}. \tag{12.1}$$

Betrachten wir einen Kern mit A Nukleonen, so werden im Grundzustand alle Zustände aufgefüllt sein, die zu Impulsen gehören, die innerhalb einer Kugel mit dem Radius P des maximalen Impulses liegen. Durch Integration der Gl. (12.1) von $p = 0$ bis $p = P$ ergibt sich

$$\int \mathrm{d}n = A = \frac{4V}{h^3}\frac{4\pi}{3}P^3 = \frac{2V}{3\pi^2}\left(\frac{P}{\hbar}\right)^3. \tag{12.2}$$

Das Volumen des Kernes ist gegeben durch

$$V = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \cdot A; \qquad R_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{cm},$$

und man erhält

$$P = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{R_0}. \tag{12.3}$$

Für die kinetische Energie der Nukleonen, die Fermi-Energie, erhält man:

$$E_\mathrm{F} = \frac{P^2}{2M} = 24{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{eV}. \tag{12.3a}$$

Zu dieser Energie ist die Bindungsenergie für ein Nukleon — ≈ 8 MeV — zu addieren, so daß sich für die Tiefe der Potentialmulde etwa 33 MeV ergibt.

Die Gesamtenergie eines Atomkerns erhält man durch Summation über die Energie $E_\mathrm{F} = p^2/2M$ aller Nukleonen, die sich innerhalb der Fermi-Kugel vom Radius p — $(p + \mathrm{d}p)$ befinden. Aus Gl. (12.3a) erhält man dann

$$E_\mathrm{kin} = \int \mathrm{d}n \frac{p^2}{2M} = \frac{16\pi}{h^3} V \int \frac{p^2}{2M} p^2\,\mathrm{d}p$$

$$= \int_0^P \frac{16\pi V}{2Mh^3} p^4\,\mathrm{d}p = \frac{1}{5}\frac{16\pi V}{h^3 2M} P^5.$$

Nach Gl. (12.2) $V = \dfrac{3Ah^3}{16\pi P^3}$ erhält man

$$E_\mathrm{kin} = \frac{3}{5} A \frac{P^2}{2M} = \frac{8\pi}{5M}\frac{P^5 V}{h^3} = \frac{P^5 V}{5M\pi^2(\hbar)^3}. \tag{12.4}$$

Mit $V = \dfrac{4\pi}{3} R_0^3$ erhält man $P^3 = \dfrac{9}{8} \hbar^3 \dfrac{\pi}{R_0^3}$.

Bisher wurden alle Nukleonen als gleichartig betrachtet. Unterscheidet man Protonen von Neutronen, so ergibt sich eine Modifikation der Gl. (12.4). Es wird nun

$$\int \mathrm{d}n = Z = \frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{P}{\hbar}\right)^3; \quad P_\mathrm{max}\,(\mathrm{Proton}) = (3\pi^2)^{1/3}\,\hbar \left(\frac{Z}{V}\right)^{1/3}.$$

Da das Kernvolumen $V = \frac{4\pi}{3} R_0^3 A$ ist, erhält man

$$\left.\begin{aligned} P_{\max}\,(\text{Proton}) &= \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{Z}{A}\right)^{1/3}; \\ P_{\max}\,(\text{Neutron}) &= \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{N}{A}\right)^{1/3}. \end{aligned}\right\} \tag{12.5}$$

Die maximale kinetische Energie $E_F = p_{\max}^2/2M$ ergibt sich zu:

$$\left.\begin{aligned} E_F\,(\text{Proton}) &= \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2MR_0^2} \left(\frac{Z}{A}\right)^{2/3} \approx 37 \left(\frac{Z}{A}\right)^{2/3} \text{MeV}; \\ E_F\,(\text{Neutron}) &= \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2MR_0^2} \left(\frac{N}{A}\right)^{2/3} \approx 37 \left(\frac{N}{A}\right)^{2/3} \text{MeV}. \end{aligned}\right\} \tag{12.5a}$$

Die Tiefe der Potentialmulde wird so gewählt, daß der höchste Energiezustand die Bindungsenergie eines Nukleons von 7 ··· 8 MeV ist. Da im Kern die Zahl der Neutronen größer als die der Protonen ist, folgt aus Gl. (12.5), daß sich die Tiefen

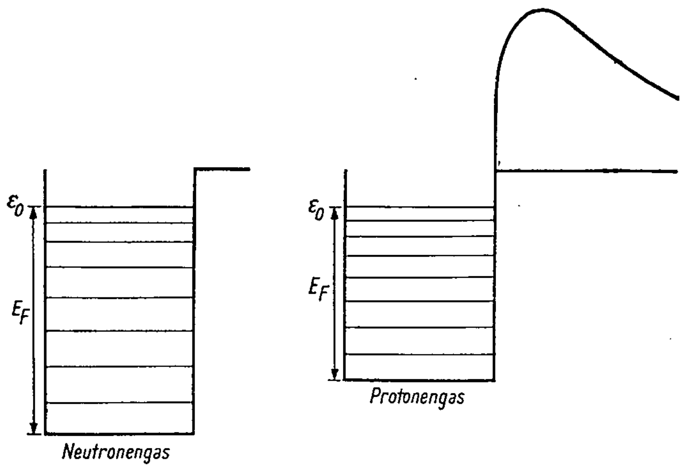


Abb. 48. Potentialverlauf für Neutronen- und Protonengas (Fermi)

der Potentialmulden für Neutronen und Protonen unterscheiden. Innerhalb des periodischen Systems ändert sich das Verhältnis $Z:A$ von 1:2 bis 1:2,6, und man erkennt, daß E_F nur wenig mit A variiert. In Abb. 48 ist das Schema von Kernmodellen für Protonen und Neutronen, entsprechend den durchgeführten Betrachtungen, dargestellt. ε_0 bedeutet dabei die Bindungsenergie des äußersten Nukleons.

12.2. Schalenmodell

Bei diesem Kernmodell wird die Vorstellung von Nukleonenschalen benutzt, analog zur Vorstellung von Elektronenschalen beim Atom. Ein derartiges Modell ist möglich, wenn die Zusammenstöße der Nukleonen untereinander selten sind, so daß das Nukleon einen Weg von der Größe des Kerndurchmessers ohne Zusammenstoß zurücklegen kann.

Zunächst scheint es so, als ob das nicht der Fall sein könnte, denn bei einer Energie von etwa 20 MeV beträgt beispielsweise der Wirkungsquerschnitt für (n—p)-Streuung $0{,}3 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{cm}^2$. Danach würde die mittlere freie Weglänge eines Neutrons innerhalb von Kerndimensionen nur etwa ein Drittel des Kernradius betragen. Jedoch sind bei dieser Betrachtung zwei Umstände nicht berücksichtigt worden.

1. Wenn ein Nukleon sich einem zweiten stark nähert, so bewegt es sich unter der Potentialmulde. In diesem Falle können die Potentialmulden der einzelnen Nukleonen so eng gelagert sein, daß sie innerhalb der Kerndimensionen ein etwa homogenes Potential bilden (Abb. 49).

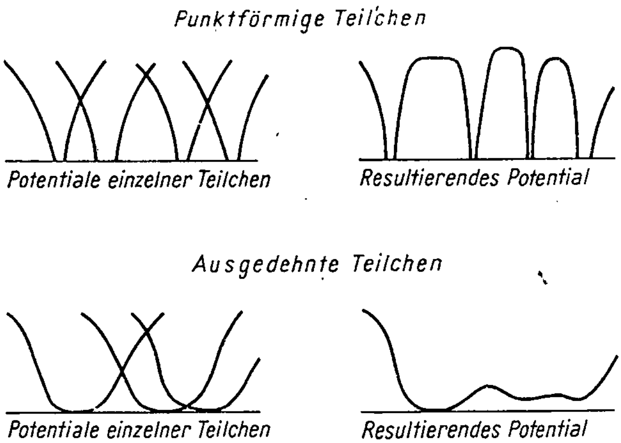


Abb. 49. Potentialmulden für Kerne mit mehreren Nukleonen

2. Der Kern stellt ein entartetes System dar, in dem die niedrigeren energetischen Niveaus größtenteils besetzt sind. Zusammenstöße zwischen zwei Nukleonen können nur stattfinden, wenn beide Nukleonen in freie Niveaus übergehen können. Das Pauli-Prinzip verbietet, daß sich zwei gleichartige Nukleonen in demselben Zustand befinden. Wenn die möglichen Zustände jedoch alle aufgefüllt sind, dann werden Zusammenstöße zwischen Nukleonen überhaupt nicht möglich sein.

Das Schalenmodell ist von einer Reihe von Autoren bearbeitet worden. Zur Berechnung wurde ein rechteckiges Potential gewählt oder ein solches mit abgerundetem Rand. Eine weitere Annahme war die, daß sich die Tiefe des Poten-

tials nicht merklich mit der Nukleonenzahl A der Kerne ändert, wie es ja das Fermi-Gas-Modell zeigt. Die Gesamttiefe des Potentials ist durch die Forderung bestimmt, daß die Bindungsenergie für ein Nukleon etwa 8 MeV beträgt. Tabelle 20a zeigt die spektroskopische Bezeichnung der Niveaus, ihre Besetzungszahl mit gleichartigen Teilchen und die Gesamtzahl der aufgefüllten Niveaus. Die Ziffern neben der Buchstabenbezeichnung für l ($l = 0$ für s usw.) bedeuten die Anzahlen radialer Knoten der Wellenfunktionen.

Tabelle 20a. Quantensymbole und Besetzungszahlen

Quantenzustand	Besetzungszustand $2(2l+1)$	Gesamtzahl der aufgefüllten Niveaus
1 s	2	2
1 p	6	8
{ 1 d	10 }	20
{ 2 s	2 }	
{ 1 f	14 }	40
{ 2 p	6 }	
{ 1 g	18 }	
{ 2 d	10 }	70
{ 3 s	2 }	

Für Potentialmulden mit rechteckigen Grenzen sind die errechneten Niveaus fast äquidistant. Bei abgerundeten Wällen der Potentialmulde nähern sich einzelne Niveaus einander, so daß sie Gruppen bilden, die energetisch eng beieinander liegen. Das ist in Tabelle 20 durch Klammern gekennzeichnet. Beispielsweise nähert sich das Niveau 1d dem Niveau 2s.

Wie schon erwähnt wurde, ist die Tiefe der Potentialmulden für die Kerne ungefähr konstant. Der Kernradius ist gegeben durch $1{,}4 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ cm.

Das Pauli-Prinzip schreibt die maximale Zahl gleichartiger Teilchen vor, die sich in einer bestimmten räumlichen Lage befinden dürfen. Im Zustand mit dem Bahndrehimpuls l können sich $2(2l+1)$ gleichartige Teilchen befinden. Der Faktor 2 vor der Klammer berücksichtigt die beiden Einstellmöglichkeiten des Spins ($+1/2$ und $-1/2$).

Es ist von Interesse, in diesem Zusammenhang den Aufbau der leichtesten Kerne zu betrachten.

Kern	Konfiguration	Bemerkungen
$^2_1$H (D)	(1s 1s)	Proton im Zustand 1s, ebenso das Neutron. Der Kern kann den Spin 0 oder 1 haben, es ist $S = 1$ beobachtet.
$^3_2$He	(1s^2 1s)	Da die Spins der Protonen antiparallel sein müssen, hat der Kern den Spin $S = 1/2$
$^3_1$H	(1s 1s^2)	Da die Spins der Neutronen antiparallel sein müssen, hat der Kern den Spin $S = 1/2$

Kern	Konfiguration	Bemerkungen
${}^4_2$He	($1s^2$ $1s^2$)	Der Spin ist $S = 0$, der Kern hat eine abgeschlossene Nukleonen-Schale
${}^5_2$He	(———)	Der Kern existiert nicht, denn für die Konfiguration ($1s^2$ $1s^2$ 2p) ist der Zustand 2p nicht gebunden. ^{5}He ist der Compoundkern der Reaktion n + ^{4}He → n + ^{4}He. Ein Maximum der Streuung tritt für $E \approx 1$ MeV auf, was dem Niveau 2p des ^{5}He entspricht.
${}^6_3$Li	($1s^2$ 1p $1s^2$ 1p)	Der Kern besteht aus zwei unabhängigen Systemen, deren jedes den Bahndrehimpuls 1 und den Spin 1/2 hat.

Infolge der bisherigen Betrachtungen hat man für die folgenden Neutronen- oder Protonenzahlen abgeschlossene Schalen zu erwarten: 2, 8, 20, 70, 112, 168, ...

Bei den schweren Kernen vermindert die Coulombsche Abstoßung die Zahl der Protonen im Verhältnis zur Zahl der Neutronen, so daß die Kerne nicht gleichzeitig gleichartige abgeschlossene Schalen aus Nukleonen beider Typen haben können. Aus dem Experiment ergeben sich folgende Zahlen, die abgeschlossenen Schalen entsprechen: 2, 8, 20, (28), (40), 50, 82, 126 (sogenannte „magische Zahlen"). Kerne mit derartigen Neutronen- oder Protonenzahlen sind besonders stabil.

Die zweite, experimentell gewonnene Zahlenreihe unterscheidet sich von der ersten. Dieser Unterschied ist von Haxel, Suess, Jensen und Goeppert-Mayer erklärt worden. Von ihnen wurde angenommen, daß die Spin-Bahn-Wechselwirkung die Energieniveaus, die verschiedenen Werten des gesamten Bahndrehimpulses J entsprechen, aufspaltet. So spaltet z. B. das Niveau 1 g in zwei Niveaus auf: 1 $g_{9/2}$ und 1 $g_{7/2}$. Es sei weiter angenommen, daß das Niveau mit größerem J einem stabileren Zustand entspricht als das mit kleinerem J, also niedriger liegt. Diese Annahmen befinden sich nicht im Widerspruch mit irgendwelchen Tatsachen, die bezüglich der Kerne bekannt sind. Dann muß man, beispielsweise für die abgeschlossene Schale unseres bisher betrachteten Modells mit der Nukleonenzahl 40, diese Zahl im Sinne der Abb. 50 verändern. Für die an diesem Beispiel erläuterte Änderung der Theorie der Kernschalen erhält man Nukleonenzahlen der einzelnen Schalen — magische Zahlen —, die mit den experimentellen Ergebnissen zusammenfallen.

Die Kerne, bei denen die Neutronen- oder Protonenzahl mit einer der magischen Zahlen zusammenfällt, besitzen besondere Stabilität. Das experimentelle Material, das dieses Verhalten bestätigt, ist bereits recht umfangreich, und es sollen im folgenden einige der Hauptergebnisse aufgeführt werden.

1. Bei den leichtesten Kernen ist die Bindungsenergie gut bekannt und gibt unmittelbaren Einblick in die Stabilitätsverhältnisse der Kerne. Beispielsweise kann man aus den Kernen ${}^{12}_6$C und ${}^{16}_8$O durch Hinzufügen eines α-Teilchens die Kerne ${}^{16}_8$O und ${}^{20}_{12}$Ne erhalten. Betrachtet man die Massendefekte der so gebildeten Kerne, so sieht man, daß sie voneinander vollständig verschieden sind. Der

erhebliche Unterschied, fast 50%, ist dadurch bedingt, daß der Kern $^{16}_{8}O$ besonders stabil ist: $N = 8$ und $Z = 8$.

2. Die Häufigkeitsverteilung der Isotope zeigt bei den magischen Zahlen eine mehr oder weniger ausgeprägte Zunahme gegenüber den Nachbarkernen. Beispielsweise hat $_{50}Sn$ die größte beobachtete Anzahl stabiler Isotope, nämlich 10.

3. Die magische Zahl 126 kommt nur noch für Neutronen vor. Der Kern $^{208}_{82}Pb$ mit den beiden magischen Zahlen $Z = 82$ und $N = 126$ ist der häufigste unter den stabilen Bleiisotopen. Die instabilen Kerne mit $N = 126$ zeigen eine besonders große Halbwertszeit beim α-Zerfall. Andererseits ist die Zerfallsperiode der instabilen Kerne mit $N = 128$ gegenüber α-Zerfall (Übergang zu $N = 126$) besonders kurz. $^{212}_{84}ThC'$ hat eine Halbwertszeit von $3 \cdot 10^{-7}$ s, während $^{210}_{84}Po$ mit $N = 126$ eine Halbwertszeit von etwa 140 Tagen besitzt.

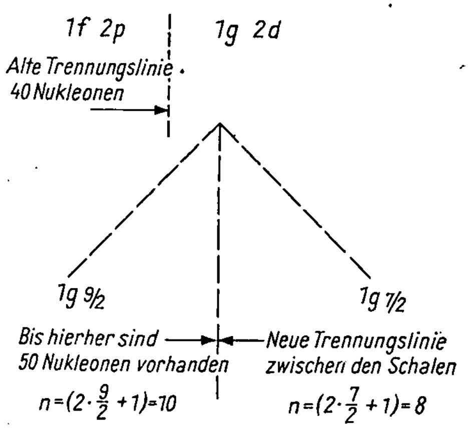


Abb. 50. Beispiel für die Aufspaltung von Kernniveaus bei Spin-Bahn-Kopplung nach dem Schalenmodell

4. Die Einfangsquerschnitte für Neutronen sind bei Kernen mit magischen Zahlen besonders klein. Die Anregungsenergien für die unelastische Streuung von Neutronen liegen besonders hoch. So zeigt $_{50}Sn$ ein erstes Anregungsniveau bei 0,7 MeV, $_{82}Pb$ zeigt bei allen seinen Isotopen ein hochliegendes erstes Niveau, dessen Energie oberhalb von 0,5 MeV liegt, bei $^{208}_{82}Pb$ wurde das tiefste Niveau sogar erst bei 2,6 MeV beobachtet. Ebenso zeigt $^{209}_{83}Bi$ ($N = 126$) ein erstes Niveau bei 0,9 MeV. Die benachbarten Elemente Hg und W dagegen zeigen erste Anregungsniveaus bei etwa 0,4 MeV bzw. 0,15 MeV, also bei wesentlich geringeren Energien.

Diese Beobachtungsdaten, denen man noch weitere hinzufügen könnte, sprechen dafür, daß das Schalenmodell der Kerne viele Kerneigenschaften richtig wiedergibt. Besondere Bedeutung hat das Modell und seine Weiterführung zum verallgemeinerten Modell von Å. Bohr und Mottelson, das mit Kerndeformationen rechnet, für die Kernspektrometrie erlangt.

12.3. Reaktionen bei hohen Energien. Optisches Kernmodell

Um den die Behandlung von Kernreaktionen komplizierenden Einfluß elektrischer Kräfte auszuschließen, beschäftigen wir uns im folgenden mit Neutronenreaktionen. Wir betrachten ein Neutron, das mit einem genügend schweren Atomkern zusammenstößt. Es besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Neutron durch den Atomkern hindurchläuft, ohne Energie zu verlieren, wobei es aber seine Anfangsrichtung ändert. Derartige Prozesse nennt man elastische Streuprozesse. Das Neutron kann jedoch absorbiert werden, dann bildet sich ein Compoundkern, der verschiedenartig zerfallen kann. Im besonderen kann der Compoundkern ein Neutron mit geringerer Energie (unelastische Streuung) oder mit der Anfangsenergie (Reemission) aussenden.

Wenn wir von dem weiteren Schicksal des Compoundkernes absehen, lassen sich die Ereignisse, die beim Zusammenstoß des Neutrons mit dem Kern eintreten können, in zwei Typen einteilen: Streuung ohne Bildung eines Compoundkerns und Absorption mit Bildung eines Compoundkerns.

Aus diesem Aspekt heraus kann man die Kernstöße von Neutronen als Durchgang des Neutrons durch irgendein Medium, eine Kernmaterie, betrachten und diese Aufgabe analog zur Aufgabe bezüglich des Durchgangs von Licht durch ein absorbierendes und brechendes Medium betrachten. Ähnlich wie für ein optisch aktives Medium ein Brechungsindex eingeführt wird, der im Falle des Vorhandenseins von Absorption als komplexe Zahl erscheint, muß auch für den Fall des Atomkerns eine Größe eingeführt werden, die geeignet ist, den nukleonenoptischen Charakter des Kernmediums zu kennzeichnen. Diese Methode der Betrachtung der Kernstruktur nennt man „optisches Kernmodell".

Wir wenden uns der Schrödinger-Gleichung für Neutronen zu. Nach der Quantenmechanik wird die Bewegung eines Nukleons durch die Wellengleichung mit irgendeinem Potential für die Wechselwirkung zwischen Nukleon und Kern beschrieben. Wenn das Potential reell ist, erhalten wir Neutronenstreuung. Einer Absorption der Neutronen entspricht, wie gleich ersichtlich werden wird, ein komplexes Potential.

Wir schreiben die Wellengleichung für ein Teilchen in einem Feld, das durch ein komplexes Potential $U - \mathrm{i}\, V$ (U und V sind reelle Funktionen) beschrieben wird:

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi - \mathrm{i}\, V\psi. \tag{12.6}$$

E ist die Energie des Teilchens. Schreiben wir weiterhin die konjugierte Gleichung:

$$E\psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi^* + U\psi^* + \mathrm{i}\, V\psi^*. \tag{12.6a}$$

Wir erweitern Gl. (12.6) mit ψ^* und Gl. (12.6a) mit ψ und bilden die Differenz beider Gleichungen. Nach einfacher Umformung ergibt sich

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\operatorname{div}(\psi^*\operatorname{grad}\psi - \psi\operatorname{grad}\psi^*) - 2\, V\psi\psi^* = 0. \tag{12.7}$$

Da $\psi\,\psi^*$ die Teilchendichte ϱ ist und $\frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\,\mathrm{grad}\,\psi - \psi\,\mathrm{grad}\,\psi^*)$ die Stromdichte $\boldsymbol{j}$, kann man Gl. (12.7) in der Form schreiben:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{j} = -2\varrho V. \tag{12.8}$$

Der linke Teil der Gl. (12.8) ist die Divergenz der Stromdichte. Sie verschwindet, wenn kein Teilchen absorbiert wird oder entsteht. Daher stellt der rechte Teil der Gleichung nichts anderes dar als die Intensität der Quellen. Folglich wird die Absorption der Teilchen pro Volumen- und Zeiteinheit durch die Größe

$$2V\varrho = 2\psi^*\psi V \tag{12.9}$$

dargestellt. Der imaginäre Teil des komplexen Potentials spielt daher die Rolle des Absorptionskoeffizienten.

Zunächst ist zu bemerken, daß zur deutlichen Unterscheidbarkeit zwischen den Prozessen, die mit der Bildung eines Compoundkernes, und denen, die mit der direkten elastischen Streuung verbunden sind, notwendigerweise die Reemission gering sein muß. Das ist der Fall, wenn der Compoundkern auf zahlreiche, verschiedene Arten zerfallen kann, also bei Energien der Größenordnung 100 MeV (wie man früher annahm), mindestens jedoch 10 MeV. Stellen wir nun die Schrödinger-Gleichung in etwas anderer Weise dar, so läßt sich die Bewegung des Neutrons in folgender Form für das optische Modell beschreiben:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U + \mathrm{i}V)\,\psi = 0. \tag{12.10}$$

Diese Gleichung ist ähnlich der Wellengleichung im Vakuum:

$$\Delta\psi + K^2\psi = 0. \tag{12.11}$$

Formal kann gesagt werden, daß beim Übergang vom Vakuum in den Kern der Wellencharakter des Neutrons, der im Vakuum gegeben ist durch

$$K = \frac{(2mE)^{1/2}}{\hbar}, \tag{12.12}$$

sich ändert und gleich der komplexen Größe

$$K = K_1 + \mathrm{i}K_2 = \frac{(2m)^{1/2}}{\hbar}(E - U + \mathrm{i}V)^{1/2} \tag{12.13}$$

wird. In Analogie zur Dispersionsoptik kann man von einem komplexen Brechungsindex der Kernmaterie sprechen:

$$n = \frac{1}{k}(K + \mathrm{i}K_2); \tag{12.14}$$

man benutzt diese Größe jedoch nicht in der Kernphysik.

Betrachten wir die physikalische Bedeutung des Wellenvektors. Ein partikuläres Integral der Wellengleichung für das Neutron im Innern des Kerns kann

formal in demselben Sinne geschrieben werden wie die Lösung im Vakuum, das heißt nach Art einer ebenen Welle, nur mit einem komplexen Wellenvektor. Wenn wir uns auf einen eindimensionalen Fall beschränken, kann die Lösung in folgender Form geschrieben werden:

$$\psi = e^{iKx} = e^{iK_1x} e^{-K_2x}. \tag{12.15}$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, daß K_2 die Absorption beschreibt.

Um die Größen des komplexen Wellenvektors mit Größen zu verbinden, die bei den Experimenten über die Streuung von Neutronen bestimmt werden, ist es notwendig, die Diffraktion von Neutronenwellen an einem Kern mit gegebenen optischen Eigenschaften und gegebenem Radius zu untersuchen. Die Aufgabe besteht also darin, die Lösung der Wellengleichung im Kern und außerhalb des Kerns zu finden. Beide Lösungen sollen an der Grenze des Kerns stetig ineinander übergehen, ebenso ihre Ableitungen. Gewöhnlich wird die Lösung in Kugelfunktionen entwickelt, und die Stetigkeitsbedingungen liefern algebraische Gleichungen für die Koeffizienten der Glieder der Reihe. Hierbei ist die Berechnung einer relativ großen Anzahl von Gliedern der Reihe erforderlich, was etwas mühsam ist.

Die Aufgabe wird wesentlich erleichtert, wenn man Neutronen hoher Energien betrachtet, bei denen die Längen der De-Broglie-Wellen klein im Verhältnis zur Größe der Atomkerne sind. Die Wellenlänge λ_n des Neutrons wird zahlenmäßig durch die Formel bestimmt:

$$\lambda_n = \frac{4{,}5}{\sqrt{E}} \cdot 10^{-13}\,\text{cm} \quad \text{mit} \quad E \text{ in MeV}.$$

Da die Kernradien in der Größenordnung von 10^{-12} cm liegen, wird $\lambda_n \ll R$ erst für Energien von einigen 100 MeV erfüllt. Für derartige Neutronen kann die Aufgabe mit einer Methode gelöst werden, die ähnlich der Fraunhoferschen Diffraktion (d. i. die Beugung paralleler Lichtstrahlen an einer kreisförmigen Öffnung) zu behandeln ist.

Der Strahl der einfallenden Neutronen werde durch eine ebene Welle $e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$ beschrieben, wo $\boldsymbol{k}$ der Wellenvektor des Neutrons im Vakuum ist. Die Amplitude der Wellenfunktion sei 1. Betrachten wir eine Ebene senkrecht zum einfallenden Strahl hinter dem Kern, so werden wir einen Schatten des Kerns wahrnehmen, wohin die Neutronen, parallel zum Wellenvektor $\boldsymbol{k}$, nur fallen können, wenn sie durch den Kern hindurchlaufen. Wir nehmen als Näherung an, daß in allen Punkten der Ebene, die nicht in den Bereich des Kernschattens fallen, die Wellenfunktion mit und ohne Anwesenheit des Kerns dieselbe Größe besitzt.

Da man eine Wellenfunktion immer mit einem willkürlichen Phasenfaktor erweitern kann, nehmen wir an, daß dieser Phasenwinkel außerhalb des Schattenbereiches überall Null sei. Das bedeutet eine derartige Wahl der z-Koordinate, daß die von uns gewählte Ebene einem $z = 0$ entspricht. Dann geht die Wellenfunktion $\psi = e^{ikz}$ außerhalb des Schattens in die Einheit über.

Zur Berechnung der Wellenfunktion innerhalb des Schattens nimmt man an, ihre Veränderung komme dadurch zustande, daß der durch den Kern hindurchgehende Anteil (an Neutronen) einen Wellenvektor besitzt, der nicht gleich $\boldsymbol{k}$,

sondern gleich $K + iK_2$ ist. Läge dieser Anteil im Vakuum, so sollte sich die Phase während des Weges durch den Kern um $k \cdot \Delta$ ändern, wobei Δ die Weglänge innerhalb des Kerns ist. Im Innern des Kerns ergibt sich die Phasenänderung zu $(K_1 + iK_2)$. Daher tritt beim Durchgang des Neutrons durch den Kern eine zusätzliche Phasenänderung auf:

$$\delta = (K_1 + iK_2 - k)\Delta. \tag{12.16}$$

Da wir annehmen, daß außerhalb des Schattens die Wellenfunktion gleich 1 ist, so wird innerhalb des Schattens

$$\psi_{\text{sch}} = e^{i(K_1-k)\Delta}\, e^{-K_2\Delta}. \tag{12.17}$$

Kennt man den Wert der Wellenfunktion, so kann man auch den Wert der Wirkungsquerschnitte errechnen. Für den Absorptionsquerschnitt ist das einfach:

$$\psi\psi^* = \begin{cases} e^{-2K_2\Delta} & \text{im Bereich des Schattens;} \\ 1 & \text{im übrigen Bereich.} \end{cases} \tag{12.18}$$

Wenn $K_2 = 0$ ist, so wäre der Betrag der Teilchendichte in allen Punkten gleich 1.

Es ist augenscheinlich, daß der Unterschied zwischen der Einheit und $e^{-2K_2\Delta}$ durch die Neutronen bedingt ist, die von dem Kern absorbiert werden. Die Schwächung des Strahls, die infolge der Absorption im Kern erfolgt, wird daher durch die Funktion

$$1 - e^{-2K_2\Delta}$$

bestimmt. Hieraus ist bereits unschwer der Wirkungsquerschnitt zu erhalten. Durch Integration der Funktion für die Strahlschwächung über die betrachtete Ebene erhalten wir

$$\mathfrak{S}_{\text{Abs}} = \int (1 - e^{2K_2\Delta})\, dx\, dy. \tag{12.19}$$

Die faktische Integration hat nur über den Bereich des Schattens zu erfolgen. Δ hängt augenscheinlich von den Koordinaten x und y ab.

Etwas schwieriger ist es, die elastische Streuung zu berechnen. Bei Abwesenheit eines Kernes wäre die Wellenfunktion eine ebene Welle, und im Koordinatensystem, in dem die Achse z dem Wellenvektor parallel gerichtet ist, würde sie nicht von x und y abhängen, sie wäre einfach e^{ikz}. Die Anwesenheit des Kerns verändert die Wellenfunktion so, daß ihr Betrag Funktion der Koordinaten wird. Daher wird eine derartige Funktion nicht mehr eine ebene Welle darstellen, d. h., sie wird nicht mehr einen parallelen Teilchenstrom darstellen. Da die Energie des Neutrons sich bei elastischer Streuung nicht ändert, kann man erwarten, daß die neue Wellenfunktion Teilchen beschreibt, die in verschiedene Richtungen gestreut werden. Um diese gestreuten Teilchen hinsichtlich ihrer Richtung unterscheiden zu können, muß man, nach der Quantenmechanik, die ermittelte Wellenfunktion in der (x, y)-Ebene in ein Fourier-Integral verwandeln. Die Komponenten dieser Entwicklung (richtiger der Quadrate ihrer Moduln) bestimmen die Intensität der Teilchenströme in verschiedenen Richtungen. Die Fourier-Zerlegung muß nach zwei Veränderlichen, k_x und k_y, entsprechend den Koordinaten der (x, y)-Ebene,

vorgenommen werden. Wenn am Kern keine Streuung stattfände, würde die Zerlegung nur eine Komponente, die $k_x = k_y = 0$ entspricht, enthalten.

Auf Grund dieser Überlegungen läßt sich die Wellenfunktion in folgender Form darstellen:

$$\psi = (2\pi)^{-1} \int a(k_x, k_y)\, e^{i(k_x x + k_y y)}\, dk_x\, dk_y.$$

Entsprechend den Regeln der Quantenmechanik bestimmt die Größe $|a(k_x, k_y)|^2$ den Bruchteil an Neutronen, der eine Projektion des Wellenvektors auf die Achsen x und y im Intervall $(k_x, k_x + dx)$ und $(k_y, k_y + dy)$ besitzt. Nach dem Theorem von FOURIER wird

$$a(k_x, k_y) = (2\pi)^{-1} \int \psi(x, y)\, e^{-i(k_x x + k_y y)}\, dx\, dy.$$

Die Funktion $\psi(x, y)$, die in obenstehende Gleichung eingesetzt ist, hat die Bedeutung $\exp[i(K_1 - k)\Delta - K_2\Delta]$ im Bereich des Schattens und ist gleich 1 in allen anderen Punkten. Der Streuquerschnitt wird durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$d\sigma(k_x, k_y) = (2\pi)^{-2} \left|\int \psi(x, y)\, e^{-i(k_x x + k_y y)}\, dx\, dy\right|^2.$$

Um von der Verteilung nach Wellenvektoren (k_x, k_y) zur Verteilung nach Streuwinkeln überzugehen, führen wir in der (x, y)-Ebene den Vektor Θ ein, dessen Betrag den Streuwinkel bestimmt. Dann wird $k_x = k\Theta_x$ und $k_y = k\Theta_y$. Da aber der Streuquerschnitt (bei unpolarisierten Teilchen) nicht vom Azimut abhängt, wird der Querschnitt nur von der Länge des Vektors Θ abhängen. Das Integral, das den Streuwinkel bestimmt, kann berechnet werden, jedoch wird der Ausdruck reichlich kompliziert. Um den totalen Streuquerschnitt zu erhalten, kann man den Ausdruck für den differentiellen Streuquerschnitt über den Winkel oder über die Komponenten k_x und k_y des Wellenvektors integrieren. Es gibt jedoch auch einen einfacheren Weg:

Wir sahen, daß die Wellenfunktion ψ nur in einem kleinen Bereich der (x, y)-Ebene von der Einheit verschieden ist. Daher kann man für ψ schreiben:

$$\psi = 1 + (\psi - 1).$$

In diesem Ausdruck kann man die Eins als einfallende Welle interpretieren, die sich längs der z-Achse ausbreitet. (Es handelt sich um den Betrag der Wellenfunktion auf der gegebenen Ebene.) Dann beschreibt die Differenz $\psi - 1$ die Änderung der Wellenfunktion, die von der Diffraktion der Neutronen am Kern herrührt. Die obenstehende Darstellung der Wellenfunktion können wir daher als Summe der einfallenden und der gestreuten Welle interpretieren. Die Gesamtzahl der elastisch gestreuten Neutronen erhält man, wenn man $|\psi - 1|^2$ über die Ebene integriert:

$$\sigma_{el} = \int |\psi - 1|^2\, dx\, dy.$$

Diese Integration erfolgt, wie im Falle des Absorptionsquerschnittes, faktisch nur über den Bereich des Schattens. Es sei hier bemerkt, daß, da bei Absorption $|\psi| < 1$ ist, jede Absorption von einer elastischen Streuung begleitet sein muß, wie das auch die weiter oben durchgeführten Betrachtungen gezeigt haben. Der totale Querschnitt für die Wechselwirkung von Neutronen mit dem Kern wird

durch die Summe der Querschnitte

$$\sigma_{\text{ges}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{abs}}$$

beschrieben. Durch Addition beider Querschnitte erhalten wir

$$\sigma_{\text{ges}} = \int (1 - |\psi|^2 + |\psi - 1|^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Der Ausdruck $(1 - |\psi|^2 + |\psi - 1|^2)$ ergibt nach Ausrechnung $2[1 - \mathrm{Re}(\psi)]$, wo Re (ψ) den Realteil der komplexen Größe ψ bedeutet. Also erhält man

$$\sigma_{\text{ges}} \doteq 2 \int [1 - \mathrm{Re}\,(\psi)]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Man kann σ_{ges} auch durch die Funktionen K_1 und K_2 ausdrücken. Durch Einsetzen des Ausdruckes für ψ aus Gl. (12.17) ergibt sich:

$$\sigma_{\text{ges}} = 2 \int [1 - \mathrm{e}^{-2K_2\Delta} \cos 2(K_1 - K_2)\, \Delta]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,. \tag{12.20}$$

Auf diese Weise erhält man alle Beziehungen, die die Wechselwirkung des Neutrons mit dem Kern beschreiben. Zur Zeit wird an der Erweiterung des experimentellen Materials für die Bestimmung der drei optischen Charakteristika des Kerns gearbeitet. Diese Charakteristika sind der energieabhängige komplexe Brechungsindex $(K_1 + \mathrm{i} K_2)/k$ der Kernmaterie und der Radius des Atomkerns.

Man kann jedoch bereits aus den bisherigen Ableitungen und aus den experimentellen Daten einige Folgerungen ziehen. Wenn der Kern völlig undurchsichtig wäre, so erhielte man einen Absorptionsquerschnitt der Größe πR^2. In diesem Falle wird ψ im Bereich des Schattens Null, und das Integral über $[1 - |\psi|^2]$ wird gleich der Fläche des Schattens. Das Experiment zeigt indes, daß der Absorptionsquerschnitt kleiner als πR^2 ist. Das heißt, daß der Kern für schnelle Neutronen teilweise durchlässig ist, sich also wie ein halbdurchlässiges Material verhält.

Betrachten wir einen Fall, der dem realen Verhalten der Kerne nahekommt, daß nämlich die Brechung im Kern groß ist:

$$(K_1 - k)\, \Delta \gg 1\,.$$

Dann wird im Bereich des Schattens die Größe $\mathrm{Re}(\psi) = \mathrm{e}^{-2K_2\Delta} \cos 2\,(K_1 - k)\Delta$, die unter dem Integral steht und den Gesamtquerschnitt bestimmt, mehrere Male das Vorzeichen ändern. Derartige Oszillationen der Funktion führen dazu, daß die Integration über den Bereich des Schattens nur eine kleine Summe liefert. Bei starker Brechung wird daher $\mathrm{Re}(\psi)$ praktisch Null, und der Ausdruck für den Gesamtquerschnitt lautet

$$\sigma_{\text{ges}} = 2\pi R^2\,.$$

Die Aufteilung der Querschnitte auf die Prozesse der elastischen Streuung und die der Absorption hängt, wie ersichtlich ist, vom Betrag der Absorption ab.

Wir sahen, daß bei starker Absorption der Absorptionsquerschnitt gegen πR^2 strebt; daher wird in diesem Falle

$$\sigma_{\text{ges}} = \sigma_{\text{abs}} = \pi R^2 \quad \text{für} \quad K_2\, \Delta \gg 1\,.$$

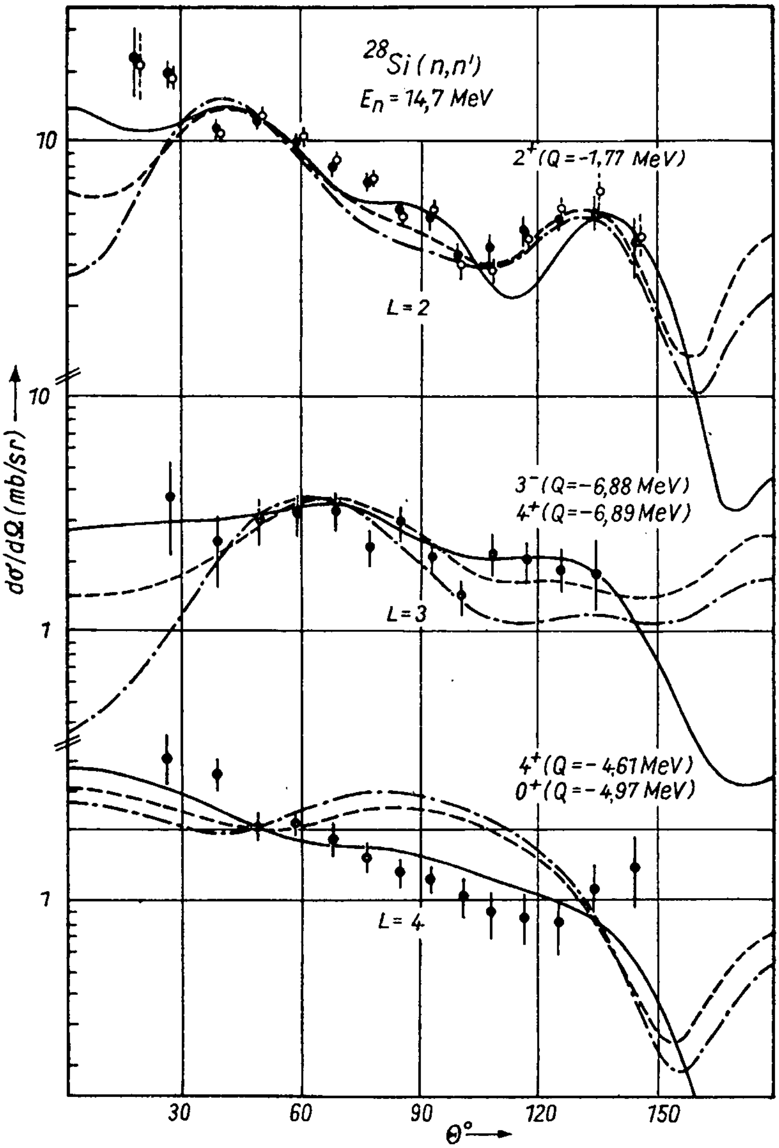


Abb. 51. Unelastische Neutronenstreuung an ^{28}Si
Gestrichelte Kurven theoretisch nach Schalen- bzw. Kollektivmodell berechnet (Höhn, Pose, Seeliger)

Umgekehrt fehlt bei kleinen K_2 die Absorption praktisch, und die Streuung erscheint für den gesamten Querschnitt allein verantwortlich:

$$\sigma_{\text{abs}} = 0; \quad \sigma_{\text{el}} = 2\pi R^2 \quad \text{für} \quad K_2 \Delta \ll 1 .$$

Durch Vergleich mit der früher für σ abgeleiteten Gleichung (Kap. 9.1.), die hier $\sigma_{\text{el}} = 2\pi(R + \lambda)^2$ ergeben würde, erkennt man, daß die auf der Grundlage des optischen Modells abgeleiteten Beziehungen erst für $R \ll \lambda$ gültig werden, d. h. oberhalb von etwa 100 MeV. Tatsächlich jedoch stimmen die experimentellen Ergebnisse bereits bei Neutronenenergien von etwa 14 MeV so gut mit dem optischen Modell bzw. seinen weiteren Vervollkommnungen überein, daß diese mit Erfolg zur Deutung der Neutronenstreuung an mittleren bis schweren Kernen herangezogen werden können.

In den vorstehenden Zeilen haben wir das optische Modell nur in seinen einfachsten Zügen betrachtet. Bei einer Analyse der experimentellen Ergebnisse wird man, wie oben bereits angedeutet, wesentlich feinere Einzelheiten berücksichtigen müssen. So muß zunächst einmal das Modell für geladene Teilchen betrachtet werden. Sodann ist es nicht richtig, den Kern einmal als Kugel und einmal als kastenartigen Körper (Potentialmulde) zu behandeln. In beiden Richtungen ist das Modell vervollkommnet worden. Die genannten Weiterentwicklungen des Kernmodells haben zu guten Übereinstimmungen mit den Experimenten geführt, insbesondere auch in dem erwähnten Bereich verhältnismäßig niederer Teilchenenergien. Der Aufwand an mathematischen Hilfsmitteln zur Errechnung konkreter Fälle der Streuung ist beachtlich, und die Rechenautomaten haben die Entwicklung eines universelleren Modells, als es hier beschrieben wurde, sehr gefördert (vgl. Abb. 51).

13. ENERGIEGEWINNUNG AUS KERNPROZESSEN

13.1. Kernspaltung

In Kap. 1. wurde die Bindungsenergie der Atomkerne behandelt. Dort wurde bereits die Bindungsenergie für einen Kern mit N Neutronen und Z Protonen erklärt:

$$\varepsilon = -[Mc^2 - (NM_n + ZM_p)c^2].$$

Nach Festlegung der Einheit für die Massenzahlen der Elemente des periodischen Systems

$$\frac{1}{12} M_{\mathrm{At}}\,({}^{12}_{6}\mathrm{C}) = 1$$

erhält man die mit dieser Einheit gemessenen Massenwerte M der Atome. Unter A wird eine ganze Zahl verstanden, die die Summe $N + Z$ der Anzahl von Protonen und Neutronen im Atomkern, also die Zahl der Nukleonen, bedeutet. Die Differenz $\delta = M - A$ heißt Massendefekt. Als Packungskoeffizient f wird der Quotient δ/A bezeichnet. Es gilt

$$f = \frac{\delta}{A} = \frac{M - A}{A} = \frac{M}{A} - 1.$$

In Abb. 52 ist der Packungskoeffizient f als Funktion der Nukleonenzahl im periodischen System dargestellt. Wie man sieht, ist $f > 0$ für kleine Werte von A bis zu $A = 16$. Dann wird f für einen weiten Bereich von $A = 16$ bis zu $A = 200$ negativ. Bei Werten oberhalb von $A = 200$ steigt f mit wachsendem A auf positiven Werten langsam an. Man erkennt, daß für $A \approx 50$ bis 60 ein Minimum von f vorhanden ist.

Aus dem Verlauf des Packungskoeffizienten in Abhängigkeit von der Massenzahl A erkennt man, daß die Synthese leichter Elemente mit positiver Energietönung verbunden ist. Bei schweren Elementen ist das Entgegengesetzte der Fall. Bei ihrer Zerlegung in leichtere Bestandteile ergibt sich eine positive Energietönung. Das ist die Ursache für den bekannten Prozeß der Kernspaltung, die 1939 von HAHN und STRASSMANN entdeckt wurde.

Betrachten wir die Energiebilanz bei der Kernspaltung. Diese läßt sich mit Hilfe der in Kap. 1.3. abgeleiteten Gl. (1.12) für die Bindungsenergie B der Kerne

(Bethe-Weizsäcker-Formel) leicht ermitteln:

$$B = 15{,}75\,A - 23{,}7\,\frac{(N-Z)^2}{A} - 17{,}8\,A^{2/3} - 0{,}71\,Z^2 A^{-1/3}, \tag{13.1}$$

oder in etwas anderer Schreibweise:

$$B = 15{,}75\,A - 17{,}8\,A^{2/3} - 0{,}71\,A^{5/3}\left(\frac{Z}{A}\right)^2 - 23{,}7\,A\left(1 - 2\,\frac{Z}{A}\right)^2. \tag{13.2}$$

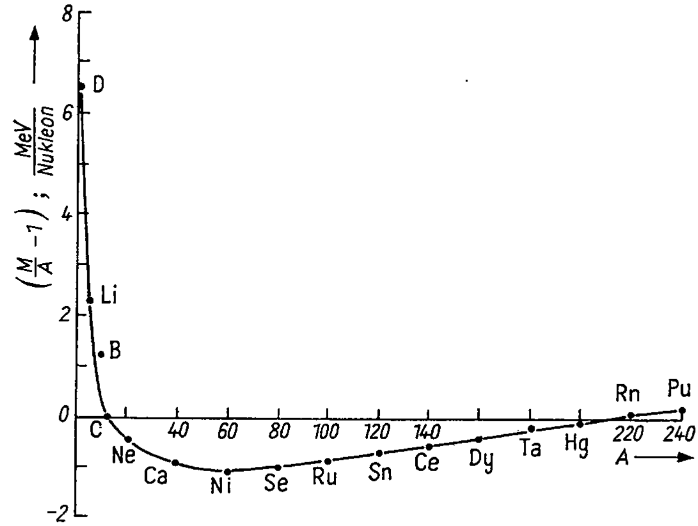


Abb. 52. Kurve für den Packungskoeffizienten $f = (M/A) - 1$

In Gl. (13.1) bedeutet das erste Glied die dem Kernvolumen proportionale Energie, das zweite Glied berücksichtigt das Mischungsverhältnis von Neutronen und Protonen im Kern, das dritte die Oberflächenenergie und das vierte die Coulomb-Energie.

Nach Ausweis der Experimente (Abb. 53) zerfällt der Urankern $^{235}_{94}U$ in zwei Bruchstücke (sehr selten in drei), deren Massen und Ladungen im Augenblick nach der Spaltung in groben Zügen folgendermaßen in Beziehung zum Ausgangskern (A, Z) stehen:

$$A_1 = \frac{3}{5}\,A; \qquad A_2 = \frac{2}{5}\,A; \qquad A_1 + A_2 = A;$$

$$Z_1 = \frac{3}{5}\,Z; \qquad Z_2 = \frac{2}{5}\,Z; \qquad Z_1 + Z_2 = Z.$$

Das Verhältnis Z/A wird beim Prozeß der Spaltung nicht geändert. Die freiwerdende Energie (Energietönung) ist gleich der Differenz zwischen den B-Werten

der beiden Bruchstücke und dem B-Wert des Ausgangskerns. Dies gilt für die beiden Bruchstücke, die unmittelbar nach der Spaltung entstehen. Diese Kerne sind jedoch nicht stabil. Die Bedingung $A_1 + A_2 = A(+1)$ und $Z_1 + Z_2 = Z$ führt nicht zu Kernen von merkbarer Lebensdauer, was auf Grund der Eigen-

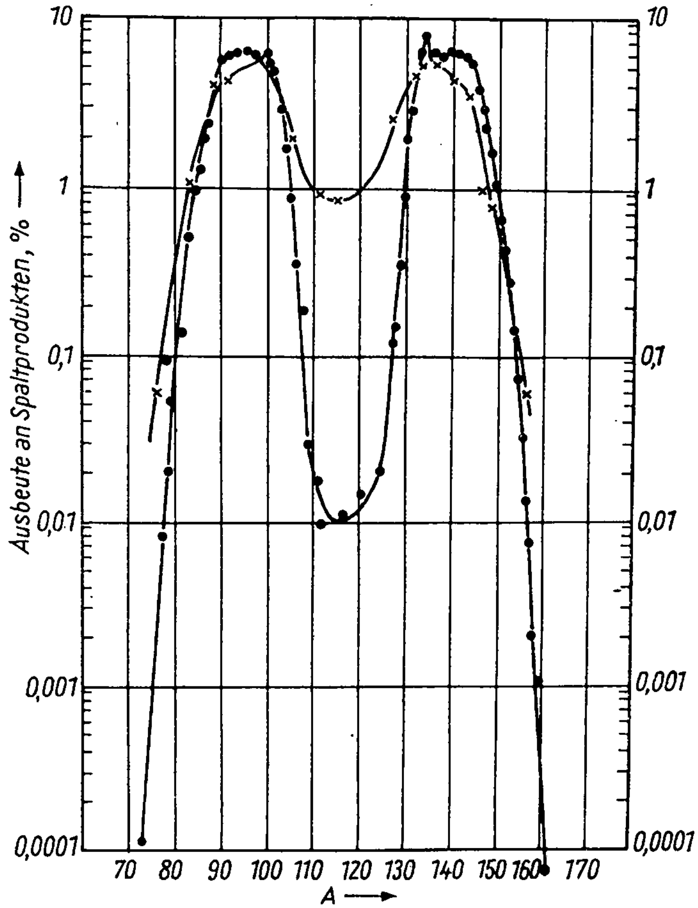


Abb. 53. Verteilung der Spaltprodukte von ^{235}U

● thermische Neutronen, × Neutronenenergie 14 MeV

schaften stabiler Kerne leicht zu erkennen ist. Tabelle 20 b zeigt für einige Elemente die charakteristischen Größen $Z, A, Z/A$ und Z^2/A. Der Kern des ^{235}U hat einen Neutronenüberschuß $N - Z = 51$. Die bei der Spaltung entstehenden Kerne, z. B. Kr und Ba, haben Neutronenüberschüsse von 12 bzw. 26. Bei der Spaltung

sind deshalb, um stabile Endkerne zu erhalten, 13 Neutronen zuviel vorhanden. Diese gehen zum Teil durch β-Zerfall innerhalb der zuerst gebildeten Kerne in

Tabelle 20 b

Element	Z	N	A	$\frac{Z}{A}$	$\frac{Z^2}{A}$	$(N-Z)$	$\frac{N-Z}{A}$
Mg	12	12	24	0,5	6	0	0
Fe	26	30	56	0,447	12	4	0,07
Kr	36	48	84	0,429	15,4	12	0,14
Ag	47	60	107	0,438	20,4	13	0,12
Ba	56	82	138	0,405	22,7	26	0,19
Dy	66	98	164	0,402	26,5	32	0,195
Pt	78	117	195	0,395	31,3	39	0,2
Pb	82	126	208	0,394	32,1	44	0,21
Ra	88	138	226	0,389	34,3	50	0,22
U	92	143	235	0,391	36	51	0,22
U	92	146	238	0,387	35,5	45	0,227

Protonen über, erhöhen daher die Kernladung, andererseits werden einige Neutronen emittiert. Stellen wir zunächst, den oben gegebenen Annahmen folgend, die Energiebilanz auf: In dem Ausdruck

$$\Delta B = B_1 + B_2 - B_{\mathrm{U}}$$

treten, unseren Voraussetzungen entsprechend, die der Nukleonenzahl A proportionalen Glieder nicht auf, also das 1. und 4. Glied der Gl. (13.2) $(Z/A = \mathrm{const})$. Man erhält also aus Gl. (13.2)

$$\begin{aligned}\Delta B = &-17{,}8\, A^{2/3}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{2/3} + \left(\frac{2}{5}\right)^{2/3} - 1\right]\\ &-0{,}71\left(\frac{Z}{A}\right)^2 A^{5/3}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{5/3} + \left(\frac{2}{5}\right)^{5/3} - 1\right].\end{aligned} \tag{13.3}$$

In dieser Beziehung stellt das erste Glied die Oberflächenenergie dar, die bei der Spaltung zunimmt, und das zweite Glied die Coulomb-Energie, die bei der Spaltung abnimmt. Die auftretenden Zahlenwerte lauten:

$$A^{2/3} = (235)^{2/3} = 38{,}1; \qquad A^{5/3} = (235)^{5/3} = 8{,}96 \cdot 10^3;$$

$$(Z/A)^2 = (0{,}391)^2 = 0{,}153.$$

Für ΔB erhält man damit

$$\Delta B = -676 \cdot 0{,}253 + 975 \cdot 0{,}357 = 349 - 171 = 178\,\mathrm{MeV}. \tag{13.4}$$

Diese Abschätzung ist roh, denn, wie oben erwähnt, zerfallen die Endprodukte, die im Moment nach der Spaltung entstehen, weiter bis zu stabilen Endkernen. An Stelle der Voraussetzung, daß die Massenzahlen und die Kernladungen bei der Spaltung konstant bleiben, muß nun infolge der hinausgeschleuderten Neutronen und β-Teilchen eine Verminderung beider eintreten. Es wird daher $A_1 + A_2 < A$ und $Z_1 + Z_2 > Z$ für den Endzustand gelten. Zu der aus Gl. (13.4) errechneten Energie $\Delta B \approx 180$ MeV ist noch die Energie der β- und γ-Strahlen sowie der Neutrinos hinzuzufügen, die insgesamt etwa 20 MeV beträgt, so daß sich B etwa folgendermaßen aus den einzelnen Komponenten zusammensetzt:

$$\Delta B = 180\,\text{MeV} + E_\beta + E_\gamma + E_\nu = (180 + 5 + 5 + 10)\,\text{MeV} = 200\,\text{MeV}.$$

Die Energietönung bei der Spaltung folgt, wie oben gezeigt wurde, aus dem Unterschied der Oberflächenanteile ($-17{,}8\,A^{2/3}$) und der vom Coulomb-Feld herrührenden Anteile ($-0{,}71\,Z^2 A^{-1/3}$). Aus den durchgeführten Rechnungen folgte:

$$B_1 + B_2 - B \approx -17{,}8\,A^{2/3} \cdot 0{,}25 + 0{,}71\,\frac{Z^2}{A^{1/3}} \cdot 0{,}36.$$

Spaltung kann auftreten (aus lediglich energetischen Bedingungen), wenn diese Differenz größer als 0 wird. Für die Grenze der Spaltbarkeit folgt hieraus

$$\frac{0{,}71}{17{,}8}\,\frac{Z^2}{A} = \frac{0{,}25}{0{,}36} \approx 0{,}7 \quad \text{und} \quad \frac{Z^2}{A} > \approx 17{,}5. \tag{13.5}$$

Demnach wären also die energetischen Bedingungen für eine Kernspaltung für alle Elemente in der zweiten Hälfte des periodischen Systems erfüllt. Daß diese Spaltungen trotzdem nicht ohne weiteres möglich sind, hat Gründe, die, ähnlich wie beim α-Zerfall, mit den Coulomb-Kräften zusammenhängen. Die Bruchstücke müssen den Coulomb-Wall des Kerns überwinden. Die Coulomb-Energie (Höhe des Potentialwalles) ist gegeben durch

$$E_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_1 + R_2}.$$

Hierbei sind Z_1, R_1 und Z_2, R_2 die Ladungszahlen bzw. die Radien der Kerne der Spaltprodukte. Für das obige Beispiel mit $Z_1 = \frac{3}{5} Z$, $Z_2 = \frac{2}{5} Z$ und den Radien $R_1 = 1{,}4 \cdot 10^{-13} \left(\frac{3}{5} A\right)^{1/3}$ und $R_2 = 1{,}4 \cdot 10^{-13} \left(\frac{2}{5} A\right)^{1/3}$ erhält man folgenden Wert für die Coulomb-Energie:

$$E_C = \frac{6}{25}\,\frac{Z^2}{1{,}4 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \cdot 1{,}6} = 1{,}87 \cdot 10^{12}\,\frac{e^2 Z^2}{A^{1/3}}.$$

Für Silber mit $Z = 47$ und $A = 107$ erhält man $E \approx 73$ MeV. Für $B_1 + B_2 - B$ erhält man bei Ag etwa 17 MeV, also eine Energie, die zum Überschreiten des Coulomb-Walles bei weitem nicht ausreicht. Die durchgeführten Betrachtungen

sind nur als einigermaßen angenäherte Abschätzungen zu werten und können daher nur ein qualitatives Bild vermitteln. Um zu weitergehenden Aussagen zu gelangen, müßte man eine eingehende Untersuchung des Mechanismus der Spaltung vornehmen. Der Überschuß an Neutronen bei Spaltprozessen führt unter geeigneten Bedingungen zu einer Kettenreaktion, die die Konstruktion von Kernreaktoren, aber auch die Herstellung von Atombomben ermöglicht.

Betrachten wir noch einige weitere Erscheinungen bei der Kernspaltung. Einige schwere Elemente, unter ihnen zunächst das seltene Isotop $A = 235$ des Urans, das im natürlichen Uran nur zu etwa 0,7% vorhanden ist, spalten unter der Einwirkung thermischer Neutronen. Weitere schwere Kerne, z. B. das häufigste der Uranisotope mit $A = 238$, spalten unter dem Einfluß von Neutronen höherer Energien, im allgemeinen mit merkbarem Wirkungsquerschnitt (≈ 1 barn), erst bei Energien oberhalb von 1 MeV. Da bei der Spaltung an Stelle des einen auf den Kern geschossenen Neutrons mehrere Neutronen entstehen (etwa 2 bis 3,5, je nach dem Spaltkern), kann eine Kettenreaktion von Spaltungen in großem Maßstabe erreicht werden. Da die üblichen Reaktoren Material verwenden, das mit thermischen Neutronen einen hohen Wirkungsquerschnitt aufweist, die bei der Spaltung freiwerdenden Neutronen jedoch höhere Energien besitzen — in merkbarem Maße bis etwas oberhalb von 10 MeV — mit einem Maximum bei 2 MeV, müssen diese Neutronen bis zu thermischen Energien verlangsamt werden. Hierzu sind vor allem leichte Materialien geeignet, die natürlich keinen wesentlichen Absorptionsquerschnitt für Neutronen haben dürfen. Zunächst wurde hierzu hochgereinigter Kohlenstoff verwendet; auch schweres Wasser ist geeignet. Seit man gelernt hat, das seltene Isotop 235 des Urans anzureichern, können auch Reaktoren mit natürlichem Wasser hergestellt werden.

Das Isotop 238 des Urans hat selbst die Eigenschaft, Neutronen zu absorbieren, und es besitzt einen hohen Einfangquerschnitt bei etwa 7,5 eV. Es gilt nun, die Reaktoren, d. h. die geometrische Anordnung von Uran und Bremsmaterial so zu wählen, daß die Neutronen in dem Absorptionsbereich um 7,5 eV möglichst kurze Zeit verweilen. Der Einfang von Neutronen durch ^{238}U hat jedoch auch einige Vorteile, denn es wird auf diesem Wege das ebenfalls mit thermischen Neutronen spaltende Plutonium, das sehr günstige Spalteigenschaften besitzt — hohen Spaltquerschnitt und etwa drei Neutronen pro Spaltakt —, erzeugt. Die Bildung des Plutoniums geschieht auf folgende Weise:

$$^{238}_{92}U(n, \gamma)\, ^{239}_{92}U \xrightarrow[23\,\text{min}]{e^-} {}^{239}_{93}Np \xrightarrow[2,3\,\text{d}]{e^-} {}^{239}_{94}Pu \;(\alpha\text{-Str. } T_{1/2} = 2,4 \cdot 10^4\ \text{a}).$$

Als Reaktormaterialien werden verwendet $^{235}_{92}U$, $^{233}_{92}U$, $^{239}_{94}Pu$. ^{233}U gewinnt man aus der Reaktion

$$^{232}_{90}Th(n, \gamma)\, ^{233}_{90}Th \xrightarrow[23,5\,\text{min}]{e^-} {}^{233}_{91}Pa \xrightarrow[27,4\,\text{d}]{e^-} {}^{233}_{92}U \;(T_{1/2} = 1,62 \cdot 10^5\ \text{a}).$$

Th spaltet jedoch nur mit schnellen Neutronen und kann daher zur Erzeugung von ^{233}U nur mit Reaktoren großer Neutronendichten für die obengenannte Reaktion verwendet werden.

Auf ähnlichem Wege, wie die Emission von α-Teilchen selbst dann möglich ist, wenn die Teilchenenergie niedriger als die Coulomb-Barriere ist (Tunneleffekt),

kann auch spontane Spaltung erfolgen. Die Wahrscheinlichkeit für spontane Spaltung ist ähnlich wie für den Durchlaß eines α-Teilchens:

$$D \approx \exp \frac{2}{\hbar} \sqrt{2MW_f} \cdot d.$$

M ist die abgeleitete Masse für die Spaltprodukte, W_f die Höhe des Coulomb-Walles für Spaltung, d die Breite der Barriere.

Im Jahre 1940 gelang es G. N. Flerov und K. A. Petrshak, mit Hilfe einer großflächigen Ionisationskammer, bedeckt mit einer dünnen Uranschicht, das Auftreten stark ionisierender schwerer Teilchen zu messen, die sie als Spaltprodukte einer spontanen Spaltung deuteten. Unabhängig davon und durch die Kriegsereignisse verspätet im Jahre 1943 publiziert, fanden W. Maurer und H. Pose bei der Untersuchung größerer Uranmengen eine Neutronenstrahlung, die sie, der ihnen zwischen Fertigstellung der Messungen und Publikation bekannt gewordenen Arbeit von Flerov und Petrshak folgend, einer spontanen Spaltung des Urans zuordneten. Aus beiden Messungen gemeinsam ließ sich dann die Halbwertszeit für spontane Spaltung zu $T_{1/2} = 0{,}8 \cdot 10^{16}$ a ermitteln. Pose führte die genannten Messungen in einem Kalibergwerk in etwa 450 m Tiefe weiter durch. Dies geschah, um sicher zu sein, daß der schwache Neutroneneffekt (damals standen lediglich geringe Mengen sehr reinen Urans — etwa 10 kg — zur Verfügung) nicht durch Neutronen aus der Höhenstrahlung verursacht war. Die gleichmäßige Temperatur im Bergwerk und die damit verbundenen außerordentlich konstanten Meßwerte gestatteten, auch eine sehr viel schwächere spontane Spaltung des Thoriums zu ermitteln. Gleichzeitig mit diesen Messungen ergab sich die Zahl der Spaltneutronen beim Uran zu 2,2 (nach neueren Messungen etwa 2,5) Neutronen pro Spaltung.

Die Erzeugung von schweren Elementen, $Z > 92$, den sogenannten Transuranen, lieferte eine größere Anzahl spontan spaltender Elemente. Die Lebensdauer nimmt mit zunehmendem Z^2/A ab. So besitzt z. B. Fermium, ${}^{256}_{100}\mathrm{Fm}$, eine Lebensdauer gegenüber spontaner Spaltung von nur $\approx 5 \cdot 10^{-4}$ s.

13.2. Kernfusion

Wie aus dem Verlauf des Packungskoeffizienten (Abb. 52) ersichtlich ist, kann am Anfang des periodischen Systems durch Synthese geeigneter Elemente Energie gewonnen werden. Bereits 1929 wurde von Houtermans und Atkinson ein Reaktionszyklus gefunden, der geeignet ist, die Stern- und insbesondere die Sonnenenergie zu liefern. Der genannte Zyklus verläuft folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
&{}^1_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H} \to {}^2_1\mathrm{D} + \mathrm{e}^+ + \nu + Q \\
&{}^2_1\mathrm{D} + {}^1_1\mathrm{H} \to {}^3_2\mathrm{He} + Q \\
&{}^3_2\mathrm{He} + {}^3_2\mathrm{He} \to {}^4_2\mathrm{He} + 2\,{}^1_1\mathrm{H} + Q.
\end{aligned}
$$

Um 2 ^{3}He-Kerne zu erhalten, müssen die erste und zweite Reaktion zweimal vor sich gehen. Man erhält als Summe die Bildung von ^{4}He aus 4 Protonen (+ 2 Positronen). Die insgesamt freiwerdende Energie beträgt bei diesem Prozeß 26,7 MeV.

Ein weiterer Zyklus, der vorzugsweise in den oberen Schichten der Sonne vor sich geht, wurde von BETHE 1938 erdacht. Er heißt Kohlenstoff-Zyklus und verläuft folgendermaßen:

$$^{12}_{6}C + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{13}_{7}N + Q .$$

^{3}N ist β-aktiv mit einer Halbwertszeit von 10,1 min.

$$^{13}_{7}N \rightarrow ^{13}_{6}C + e^+ + \nu$$

$$^{13}_{6}C + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{14}_{7}N + Q$$

$$^{14}_{7}N + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{15}_{8}O + Q .$$

$^{15}_{8}$O ist β$^+$-aktiv mit einer Halbwertszeit von 2,05 min.

$$^{15}_{8}O \rightarrow ^{15}_{7}N + e^+ + \nu$$

$$^{15}_{7}N + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{12}_{6}C + ^{4}_{2}He .$$

Die Summe dieser Reaktion ist

$$4\, ^{1}_{1}H \rightarrow ^{4}_{2}He + 2e^+ + 2\nu + Q .$$

Der Energiegewinn ist wiederum 26,7 MeV.

Von den verschiedenen Prozessen, die die Energie der Stern- und Sonnenstrahlung liefern, erscheinen derzeit unter Laboratoriumsbedingungen die folgenden am aussichtsreichsten:

$$^{2}_{1}H + ^{2}_{1}H \begin{cases} \nearrow\ ^{3}_{2}He + n, & Q = 3{,}25\,\text{MeV}; \\ \searrow\ ^{3}_{1}H + p, & Q = 4{,}03\,\text{MeV}; \end{cases}$$

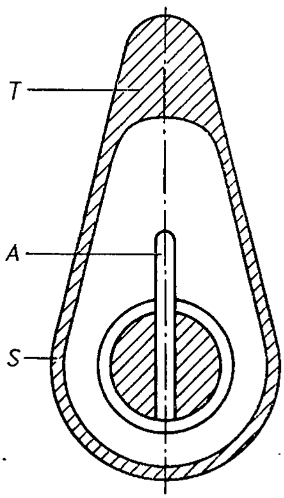
$$^{2}_{1}H + ^{3}_{1}H \rightarrow ^{4}_{2}He + n, \qquad Q = 17{,}6\,\text{MeV} .$$

Insbesondere die letzte der drei Reaktionen liefert außerordentlich hohe Energiebeträge. Errechnet man die Energiebeträge pro Masseneinheit, also pro Nukleon, so erhält man bei der (D + T)-Reaktion etwa 3,5 MeV pro Nukleon, während die Uranspaltung weniger, etwa (200/235) MeV ≈ 0,85 MeV pro Nukleon, ergibt.

Da bei diesen Reaktionen beide Partner geladene Teilchen sind, muß zur Erzielung merkbarer Ausbeuten die kinetische Energie der Teilchen einigermaßen hoch sein. Man erhält bei einer Teilchenenergie von etwa 0,1 MeV Wirkungsquerschnitte der (D + T)-Reaktion von etwa 2 barn. Diesem Energiebetrag entspricht eine Temperatur von $T \approx 10^9$ Grad. Derartige Temperaturen sind bisher nicht erreicht worden, es wird jedoch intensiv daran gearbeitet, im Plasma solche Temperaturen zu erzielen. In der sogenannten „Wasserstoffbombe" läßt sich eine Kernsynthese kurzzeitig, als Explosion, erreichen. Die Auslösung der Synthese

geschieht durch eine Atombombe, die bei ihrer Explosion Temperaturen in der Größenordnung von 10^7 Grad erzeugt.

Außerordentliche Schwierigkeiten bereitet es, die Kernsynthese gelenkt durchzuführen. Es müssen nicht nur die Temperaturen des Plasmas sehr hoch sein, sondern die Teilchendichte muß für längere Zeit mit etwa 10^{16} Teilchen pro cm^3 aufrechterhalten werden. Da bei den Verhältnissen im Laboratorium das Arbeitsvolumen (im Vergleich zu den Himmelskörpern) sehr begrenzt ist, werden erhebliche Energieverluste durch das ungünstige Verhältnis von Oberfläche zu Volumen auftreten, d. h., es werden sehr viele Teilchen das Plasma verlassen können. Das bedeutet, daß das Plasma bis zu Temperaturen von etwa $2 \cdot 10^8$ Grad und mehr erhitzt werden müßte. Das erhitzte Plasma verhält sich ähnlich wie ein Gas, das heißt, es würde sich fast momentan bis zu den Gefäßwänden ausdehnen und an diese Wärme abgeben, was bei den genannten Temperaturen zum Schmelzen bzw. Verdampfen aller bekannten Materialien führen würde. Von TAMM wurde 1950



Schema einer Wasserstoffbombe
A — Atombombe zur Zündung, *T* — Material für die thermonukleare Reaktion, *S* — Schutzmantel zur Verhinderung vorzeitiger Explosion

vorgeschlagen, das Plasma durch Magnetfelder zusammenzuhalten und auf diese Weise den Kontakt mit den Gefäßwänden zu verhindern. Die Teilchen des Plasmas tragen Ladungen und werden sich daher im Magnetfeld spiralig um die Feldlinien bewegen. Es müsse daher zu erreichen sein, daß sich das Plasma in einer Kammer ohne Kontakt mit deren Wänden bewegen läßt. Naturgemäß bedarf es bei diesen Temperaturen eines ausgezeichneten Vakuums, damit nicht durch Leitung Wärme abgeführt werden kann. Die Anforderungen an das Vakuum sind extrem hoch, und zahlreiche Methoden werden verfolgt, um höchste Vakua zu erzielen. Außer magnetischen Feldern ist auch die Anwendung elektrischer Felder zum Zusammenhalten des Plasmas möglich und wird angewandt.

Gewöhnlich wird das hocherhitzte Plasma bei derartigen Anordnungen durch kurzzeitige Entladungen großer Kondensatorbatterien erzeugt. Das Magnetfeld bildet sich in diesem Falle durch den hohen Entladungsstrom aus, der durch das

fadenförmige Plasma fließt. Mit dieser Methode gelang es bereits, Temperaturen von 10^6 Grad und mehr im Plasma zu erzielen. Es stellte sich jedoch heraus, daß die Plasmafäden nicht stabil sind, sondern sich innerhalb von Zeiten der Größenordnung 10^{-6} s, bestenfalls 10^{-4} s, deformieren, zerfallen und somit an die Gefäßwände gelangen.

Bereits im Jahre 1964 gelang es im Institut für Kernphysik der sibirischen Filiale der Sowjetischen Akademie der Wissenschaften (BUDKER, SAVOISKI) und im Moskauer Kurtschatow-Institut (ARZIMOWITSCH), kurzlebiges Plasma ($\approx 10^{-3}$ bis 10^{-4} s) bei Temperaturen von $\approx 10^8$ Grad zu erhalten. Die Teilchendichten im Plasma waren so groß (etwa 10^{13} bis 10^{14} Teilchen pro Kubikzentimeter), daß es gelang, die Neutronen bei der Kernfusion zu registrieren. Bis heute ist es nicht gelungen, die Kernreaktionen über längere Zeiten aufrechtzuerhalten.

14. ELEMENTARTEILCHEN

14.1. Erste Elementarteilchen

Der Begriff „Elementarteilchen" hat sich im Laufe der Entwicklung von Physik und Chemie erheblich gewandelt. Es ist derzeit schwierig, ihn zu definieren. Das Wort „elementar" enthält den Begriff der Unteilbarkeit, und diese ist für die heute bekannten Elementarteilchen, die überwiegend instabil sind, also in Bruchstücke zerfallen, nicht gegeben. Gewisse Züge sind jedoch allen Elementarteilchen gemeinsam; sie zerfallen in eine geringe Zahl von Endprodukten. Es existieren bereits eine recht befriedigende Systematik und gute Klassifikation ihrer Wechselwirkungen. Man ist jedoch noch weit entfernt von einer einheitlichen Vorstellung oder Theorie des Mechanismus der Teilchenbildung und ihrer Wechselwirkungen.

Im Laufe der letzten vierzig Jahre ist es gelungen, die Theorie des Atoms soweit zu entwickeln, daß fast der gesamte Aufbau der Materie, wenigstens prinzipiell, verstanden werden kann. Dem widerspricht nicht, daß die Kompliziertheit des mathematischen Apparates es bisher nicht gestattet hat, Mehrteilchensysteme exakt zu berechnen. Nach HEISENBERG endet die exakt durchführbare Quantentheorie bei der Berechnung der tiefsten Elektronenniveaus des He. Demnach gibt es im strengen Sinne keine Quantenchemie, denn selbst ein einfaches Molekül wie O_2 ist nicht exakt berechenbar. Wenig später begann man, angeregt durch die Entdeckung der Radioaktivität, mit der Untersuchung der Eigenschaften von Atomkernen, insbesondere im Laboratorium von RUTHERFORD in Cambridge. Seiner Schule entstammt eine große Anzahl von Forschern dieses Gebietes, unter ihnen Otto HAHN und H. GEIGER. Bis zum Anfang der dreißiger Jahre unseres Jahrhunderts waren nur Elektronen, Protonen und γ-Quanten als Elementarteilchen bekannt. Die nächste wichtige Etappe war die Entdeckung des Neutrons (1932) durch J. CHADWICK.

Elementarteilchen werden durch die folgenden Parameter charakterisiert: Masse, elektrische Ladung, Spin, magnetisches Moment und Isospin. Weiter unten werden noch einige Erhaltungsgrößen diskutiert werden. Tabelle 21 zeigt die Haupteigenschaften der ersten Elementarteilchen (bis Anfang der dreißiger Jahre).

Von besonderem Interesse ist die Entdeckung des Positrons durch ANDERSON (1932) (und unabhängig davon durch P. KUNZE). Bereits 1928 gelang es DIRAC, die relativistisch-quantenmechanischen Gleichungen für das Elektron zu errechnen. Hierdurch wurde es möglich, die Eigenschaften von Elektronen, insbeson-

dere auch deren Spin und magnetisches Moment, zu ermitteln. Als Besonderheit der Dirac-Gleichungen, auf die man jedoch zunächst nicht achtete (die man lediglich als eine Folge des mathematischen Apparates betrachtete, der keine physika-

Tabelle 21. Erste Elementarteilchen

Bezeichnung	Symbol	Masse MeV	Ladung	Spin
Photon	γ	0	0	1
Neutrino	ν	0	0	1/2
Elektron	e^-	0,511	-1	1/2
Positron	e^+	0,511	$+1$	1/2
Proton	p	938,256	$+1$	1/2
Neutron (instabil; $\tau = 2020$ s)	n	939,550	0	1/2

lische Bedeutung zuzuschreiben war), erschienen für ein Elektron mit gegebenem Impuls p zwei Energiebereiche. Setzt man in dem Ausdruck für die Energie,

$$U = \pm \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2},$$

den Impuls $p = 0$, so erkennt man, daß zwei Bereiche für U existieren: $U > +m_e c^2$ und $U < -m_e c^2$. Diese Energiebereiche sind durch den Abstand $2 m_e c^2$ voneinander getrennt. Die Gesamtenergie E und die Masse $m_e = U/c^2$ sind im Zustand $U < -m_e c^2$ negativ. Ein Elektron mit negativer Masse sollte höchst seltsame Eigenschaften haben. Beispielsweise sollte es sich entgegengesetzt zur Richtung einer wirkenden Kraft bewegen. Dirac zeigte, daß die Zuordnung einer Ladung $+e$ diese Schwierigkeit beheben läßt. Weiterhin nahm Dirac an, daß sämtliche möglichen Zustände mit negativer Energie der Elektronen besetzt sind. Da nach dem Pauli-Prinzip der Quantentheorie jeder Zustand nur einmal besetzt sein kann, ist es Elektronen mit positiver Energie nicht möglich, derartige Zustände einzunehmen. Der leere Raum, das Vakuum, stellt nach Dirac eine Art von „Elektronenmeer" dar, in dem alle Zustände negativer Energie besetzt sind, während die Zustände positiver Energie verfügbar bleiben.

Man kann jedoch die Positronen aus ihrem Zustand mit negativer Energie herausheben, indem man ihnen Energie $> 2 m_e c^2$ zufügt. Das kann beispielsweise durch ein γ-Quant geschehen. Bei diesem Prozeß wird jedoch ein „Loch" im Meer der Elektronen negativer Energien erzeugt, das sich wie ein Teilchen mit positiver Energie und positiver Ladung verhält, also ein Positron ist. Das γ-Quant muß das Elektron aus dem Zustande negativer Energie in den positiver Energie heben. Dadurch entsteht ein Elektron und das erwähnte „Loch", also ein Elektron-Positron-Paar. Wie wir sahen, ist dieser Prozeß der „Paarerzeugung" von grundlegender Bedeutung für den Mechanismus des Durchgangs von γ-Quanten hoher Energien ($> 2 m_e c^2$) durch Materie.

Aus dem Beispiel von Elektron und Positron ist ersichtlich, daß die Naturgesetze bezüglich der Teilchen und Antiteilchen symmetrisch sind. Diese Vorstellung führte dazu, auch bei schwereren Teilchen die Anti-Partner zu suchen.

Eine ganze Anzahl von Antiteilchen, zunächst das Antiproton und Antineutron, ist im Laufe der Zeit gefunden worden. Die Symmetrie der Naturgesetze hinsichtlich der Teilchen und Antiteilchen, also auch hinsichtlich ihrer elektrischen Ladungen, wird „Prinzip der Ladungskonjugation" genannt. Teilchen und Antiteilchen stimmen in Masse, Spin und Lebensdauer überein. Beim Zusammentreffen von Teilchen und Antiteilchen wird die gesamte Ruhenergie beider Teilchen in andere Energieformen umgewandelt.

Schließlich ist noch ein weiteres Elementarteilchen zu erwähnen, das Neutrino, das von PAULI bereits 1931 vorausgesagt wurde. (Vgl. die Ausführungen über den β-Zerfall Kap. 2.3.) Eingehende Untersuchungen zeigten, daß außer dem Neutrino noch ein Antineutrino, $\tilde{\nu}$, existiert. Die bei den β-Zerfallsprozessen auftretenden Neutrinos werden Elektronen-Neutrino und Elektronen-Antineutrino genannt. Die β-Zerfälle sind dementsprechend folgendermaßen darzustellen:

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z+1) + e^- + \tilde{\nu}_e;$$

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z-1) + e^+ + \nu_e.$$

Weiter unten wird gezeigt werden, daß außer den beiden genannten Elektronen-Neutrinos noch zwei μ-Mesonen-Neutrinos (Myonen-Neutrinos) existieren, die beim Zerfall von π-Mesonen auftreten:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu;$$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \tilde{\nu}_\mu.$$

Wie schon früher erwähnt wurde (β-Zerfall), besitzen die Neutrinos außerordentlich geringe Wechselwirkungsquerschnitte mit der Materie. Der direkte Nachweis von Neutrinos durch Kernreaktionen gelang erst, als Kernreaktoren höchster Leistung — ≈300 Megawatt — zur Verfügung standen. Derartige Reaktoren liefern, durch den Übergang von Neutronen in Protonen bei den Spaltprozessen, etwa 10^{19} Antineutrinos pro Sekunde. Mit Hilfe dieser mächtigen Quellen von Antineutrinos gelang es, die Umkehr der Zerfallsreaktion des Neutrons zu beobachten:

Neutronenzerfall: $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e;$

Umkehrreaktion: $\tilde{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+.$

14.2. π-Mesonen und Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen

π-Mesonen

Zur Darstellung der kurzreichenden Kernkräfte werden verschiedenartige Potentialformen herangezogen. Über die Natur dieser Kräfte weiß man noch wenig. Aus der Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes ist bekannt, daß die Wechselwirkung zwischen elektrischen Ladungen durch Photonen erfolgt, und zwar indem die elektrischen Ladungen dauernd Photonen aussenden und absorbieren. Durch einen derartigen Austausch von Photonen zwischen verschiedenen Ladungen wird das elektrische Feld gebildet, das zur Anziehung zwischen negativer

und positiver Ladung führt. Der Gedanke lag nahe, daß eine ähnliche Art von „Austauschkräften" auch die Ursache für die Kernkräfte sein könnte. Ähnlich den Photonen des elektrischen Feldes sollte der dauernde Austausch irgendeines Teilchens zwischen den Nukleonen erfolgen, es sollte also ein „Quant" des Kernfeldes existieren. Einen derartigen Gedankengang verfolgte G. E. TAMM 1934. Seine Annahme, daß der Austauschmechanismus durch Elektron und Neutrino geschieht, konnte jedoch nicht den kleinen Wirkungsradius der Kernkräfte und die hohe Bindungsenergie zwischen Neutron und Proton erklären.

H. YUKAWA gelang es 1935, die Idee der Austauschkräfte weiterzuführen und zu Erfolgen mit wichtigen Konsequenzen zu führen. Anschaulich läßt sich die Idee von YUKAWA folgendermaßen beschreiben: Es werden Teilchen für die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen angenommen, die eine endliche Ruhmasse besitzen. Die Entstehung und Absorption derartiger Teilchen führt nur dann nicht zur Verletzung des Energieerhaltungssatzes, wenn der Prozeß innerhalb sehr kurzer Zeit erfolgt. Das kann nach der Heisenbergschen Unschärferelation unter der Bedingung geschehen, daß

$$\Delta E \, \Delta t \geqq \hbar$$

erfüllt bleibt. Ein Teilchen mit der Ruhenergie $\Delta E = mc^2$ kann daher nur während eines Zeitintervalls $\Delta t = \hbar/mc^2$ existieren. Bewegt sich das Teilchen mit Lichtgeschwindigkeit, so wird es zum Durchlaufen eines Weges, der dem Abstand zweier Nukleonen im Kern, also etwa der Reichweite $r = 2 \cdot 10^{-13}$ cm der Kernkräfte entspricht, eine Zeit

$$\Delta t = \frac{r}{c} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-23}\,\mathrm{s}$$

benötigen. Für ΔE ergibt sich dann

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{MeV\,s}}{6{,}7 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{s}} \approx 100\,\mathrm{MeV},$$

also

$$m \approx 200\, m_e.$$

Für eine Zeit $\Delta t \approx 10^{-23}$ s wird ein virtuelles Teilchen gebildet und von einem benachbarten Nukleon, das sich im Abstand der Größenordnung 10^{-13} cm befindet, absorbiert. Der Austausch derartiger Teilchen, die heute als π-Mesonen bezeichnet werden, bedeutet den Mechanismus, oder wenigstens wesentliche Anteile des Mechanismus, der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung.

Auf Grund der relativistischen Wellengleichung (von KLEIN und GORDON)

$$(\Box - K^2)\, U = 0; \quad K = \frac{mc}{\hbar}; \quad \Box \equiv \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{14.1}$$

erhielt YUKAWA bei stationärer Lösung, $\partial/\partial t = 0$, als Potential:

$$U = g^2 \frac{e^{-kr}}{r}.$$

Das bedeutet sehr kurzreichende Kraftwirkungen. Die Austauschwechselwirkung zwischen Neutron und Proton geschieht durch geladene Mesonen, die zwischen Proton und Proton sowie Neutron und Neutron durch neutrale Mesonen.

Mesonen können als reale Teilchen nur beobachtet werden, wenn sie außerhalb des Wirkungsbereichs der Kernkräfte auftreten. Hierzu sind dem Kern so hohe Energien zuzuführen, daß der Energiebetrag der Ruhmasse und die Bewegungsenergie dazu ausreichen. Der Schwellenwert für die Erzeugung eines derartigen Mesons beim Zusammenstoß zweier Nukleonen errechnet sich folgendermaßen: Die relativistischen Energiebeziehungen (s. Anhang I) sind

$$U = mc^2 + T = \sqrt{c^4 m^2 + p^2 c^2} \quad \text{und} \quad U^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 = \text{const.} \tag{14.2}$$

Ist T_p die kinetische Energie des Geschoßprotons im Laborsystem, dann erhält man, da das zweite Proton im Laborsystem vor dem Stoß ruht,

$$U_L^2 - p^2 c^2 = (2 m_p c^2 + T_p)^2 - p^2 c^2 = \text{const.} \tag{14.3}$$

An der Schwelle besitzen die drei Teilchen, zwei Protonen und das Meson, im Schwerpunktsystem die kinetische Energie Null, also wird

$$(2 m_p c^2 + m_\pi c^2)^2 = (2 m_p c^2 + T_p)^2 - p^2 c^2.$$

Im Laborsystem ist der Impuls p durch den Impuls des Geschoßprotons gegeben:

$$p^2 c^2 = T_p{}^2 + 2 m_p c^2 T_p.$$

Diese Gleichung folgt aus

$$p^2 c^2 = U_L^2 - (m_p c^2)^2; \quad U_L = T_p + m_p c^2, \quad \text{also} \quad p^2 c^2 = T_p{}^2 + 2 m_p c^2 T_p.$$

Für den Schwellenwert zur Erzeugung eines π-Mesons beim Zusammenstoß von zwei Protonen ergibt sich aus dem Vorstehenden:

$$T_{p\min} = 2 m_\pi c^2 \left(1 + \frac{m_\pi}{4 m_p}\right) = 290\ \text{MeV}. \tag{14.4}$$

Man erkennt, daß mehr als die doppelte Ruhenergie des Mesons notwendig ist, um den Prozeß

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{n} + \pi^+$$

durchzuführen.

Zur Zeit von Yukawas Arbeiten konnte man erwarten, derartige Teilchen bei der Untersuchung der kosmischen Strahlung zu finden. Es gelang 1938 C. B. Anderson und S. H. Neddermeyer, in der Wilson-Kammer Spuren von Teilchen zu photographieren, deren Massen etwa 200 m_e betrugen. Diese Teilchen, die zunächst als Yukawa-Teilchen angesehen wurden, werden jetzt μ-Mesonen, Myonen, genannt. Die weiteren Beobachtungen und Messungen zeigten, daß diese Teilchen nicht stabil sind, sondern eine Lebensdauer von etwa 10^{-6} s haben. Die Deutung dieser Teilchen als Yukawa-Teilchen wurde mit wachsendem Umfang des Untersuchungsmaterials immer problematischer. Insbesondere erwiesen sich

ihre Wechselwirkungen mit Atomkernen als viel zu schwach, als daß man sie für die Träger der sehr starken Kernkräfte halten könnte. Diese Schwierigkeiten konnten erst 1947 durch C. F. POWELL behoben werden. Es gelang ihm, festzustellen, daß die μ-Mesonen durch den Zerfall bis dahin unbekannter Teilchen, der π-Mesonen, entstehen. Abbildung 54 zeigt schematisch die Entstehung und den Zerfall eines μ-Mesons. Diese Prozesse sind:

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu; \qquad \mu^+ \to e^+ + \nu + \bar{\nu}.$$

Die Spuren von μ-Mesonen in der Photoemulsion hatten bei derartigen Prozessen in allen Fällen die gleiche Länge: etwa 0,6 mm. Das bedeutet, daß alle entstehenden μ-Mesonen etwa die gleiche Energie von ≈ 4 MeV haben. Dieser Energiebetrag ist gering im Vergleich zum Unterschied zwischen den Ruhenergien von π- und μ-Mesonen:

$$(m_\pi - m_\mu)\, c^2 \approx (273 - 207)\, m_e c^2 \approx 33\,\text{MeV}.$$

Nach Energie- und Impulssatz muß daher wenigstens noch ein weiteres Teilchen ausgesandt werden, ein Neutrino. Der Zerfall von π- und μ-Mesonen ist, wie oben angegeben, von der Emission weiterer Teilchen begleitet.

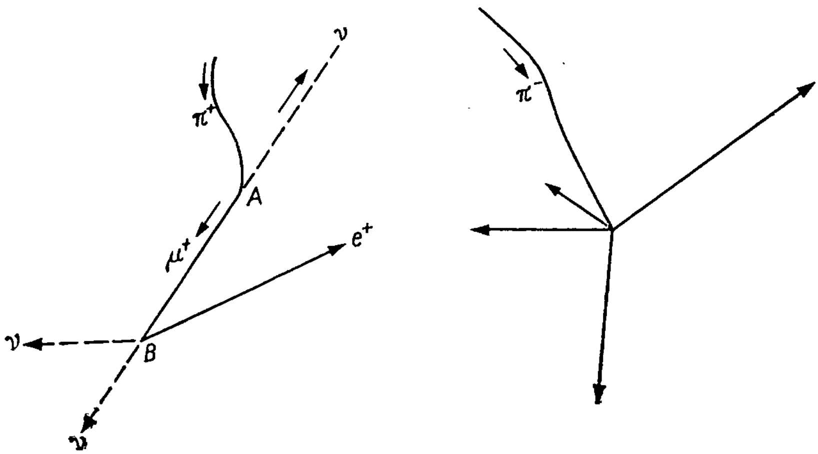


Abb. 54. Zerfall eines π^+-Mesons und eines π^--Mesons (schematisch)

Eine andere Art von Bahnspuren, wie sie von POWELL ebenfalls registriert wurden, zeigt der rechte Teil von Abb. 54. Das mit π^- bezeichnete Teilchen hat eine Masse von 273 m_e, seine Ladung ist e^-. Wie die Abbildung zeigt, erzeugt es eine Reihe von Bahnspuren, die den Zerfallsprodukten eines Atomkerns zuzuordnen sind. Dieser Atomkern hat ein π^--Meson nach seiner Abbremsung eingefangen. Infolge der negativen Ladung des π^--Mesons fehlt der Coulomb-Wall gegenüber dem Atomkern, und beide können sich dementsprechend auch bei geringen Energien einander so weit nähern, daß Kernwechselwirkung, also Einfang des Mesons, erfolgen kann. Im Jahre 1948 wurden in Berkeley nach Fertigstellung

des dortigen Synchrozyklotrons, damals mit einer Protonenenergie von etwa 600 MeV, Mesonen auf künstlichem Wege hergestellt. Die sehr viel größere Zahl der damit zur Verfügung stehenden Mesonen, die durch besondere Ablenkungssysteme von dem Gemisch der austretenden Strahlung abgelenkt werden konnten und gesonderte „Kanäle“ von π^+- und π^--Mesonen zu bilden gestatteten, ergab naturgemäß sehr viel umfangreichere Möglichkeiten, die Mesonen und ihre Bildung sowie ihren Zerfallsmechanismus zu untersuchen. Für den Zerfall ergaben sich folgende Schemata:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu, \qquad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu + \tilde{\nu},$$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \tilde{\nu}, \qquad \mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu} + \nu$$

Lebensdauer und Massen von π- und μ-Mesonen sind in Tabelle 22 zusammengestellt.

Tabelle 22. Mesonen

Bezeichnung	Symbol	Masse MeV	Mittlere Lebensdauer s	Spin, Parität J^P	Isospin	Strangeness
Myonen	$\mu^\pm$	105,659	$2{,}2 \cdot 10^{-6}$	1/2	—	—
	$\pi^\pm$	139,579	$2{,}6 \cdot 10^{-8}$	0^-	1	0
Pionen	π°	134,975	$0{,}89 \cdot 10^{-16}$	0^-	1	0

Bevor wir die möglichen Prozesse zur Erzeugung von Mesonen betrachten, ist noch ein weiterer Erhaltungssatz zu erwähnen: die Erhaltung der „Kernladung“ oder der „Baryonenzahl“. Einen derartigen Satz kannte man schon aus der Physik der Kernreaktionen, denn bei allen bekannten Kernprozessen bleibt die Zahl der Nukleonen erhalten, z. B.:

$$p + {}^7_3\text{Li} \rightarrow {}^7_4\text{B} + n: \qquad 1 + 7 = 7 + 1.$$

Hierdurch ergibt sich eine wichtige Auswahlregel für Kernprozesse. Folgende Prozesse (die die Erhaltung der Welt in Frage stellen würden) sind unmöglich:

$$p + p \rightarrow e^+ + e^+ + \ldots \quad \text{und} \quad p + n \rightarrow e^+ + \nu + \ldots$$

Das Gesetz für die Erhaltung der Baryonenzahl muß jedoch so formuliert werden' daß die (weiter unten zu beschreibenden) Antiteilchen berücksichtigt werden˙ Einem Antinukleon schreibt man die Baryonenzahl -1 zu.

Zur Bildung der π-Mesonen sind auf Grund des Erhaltungsgesetzes der Baryonenzahl bei nicht zu hohen Energien folgende Prozesse zwischen Nukleonen möglich:

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+;$$

$$p + n \rightarrow p + p + \pi^-;$$

$$p + n \rightarrow n + n + \pi^+;$$

$$n + n \rightarrow n + p + \pi^-.$$

Man erkennt, daß bei den aufgezeigten Reaktionen elektrische Ladung und Baryonenzahl erhalten bleiben. Außerdem sieht man, daß der Spin des π-Mesons die Werte 0 oder 1 besitzen darf. Weitere Untersuchungen zeigten, daß der Spin des π-Mesons 0 ist.

Auf Grund der Vorstellungen YUKAWAS war zu erwarten, daß außer den geladenen π-Mesonen auch ungeladene existieren. Die Beobachtung derartiger ungeladener Teilchen ist schwierig, denn sie können keine ionisierende Wirkung ausüben; man muß aus den Eigenschaften — Energie, Masse und Ladung — ihrer Zerfallsprodukte auf die Teilchen selbst rückschließen. Es wurde beobachtet, daß bei Protonenenergien, die zur Erzeugung geladener π-Mesonen führen, gleichzeitig eine meßbare γ-Strahlung auftrat. Nach der eingehenden Untersuchung und Deutung dieser Prozesse durch PANOFSKI kann der Zerfall der π^0-Mesonen nach dem Schema $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ als gesichert gelten.

π-Mesonen sind demnach in drei Varianten beobachtet worden: π^+, π^- und π^0. Ihre physikalischen Eigenschaften sind sehr ähnlich. Sie zeigen starke Wechselwirkungen mit Materie, also erhebliche Wirkungsquerschnitte bei ihrer Erzeugung und bei Kernreaktionen, die mit ihnen durchgeführt werden. Ihre Massen sind annähernd gleich, und sie besitzen den Spin 0. Der bedeutende Unterschied von geladenen und ungeladenen Mesonen hinsichtlich ihrer Lebensdauer ist durch die Verschiedenartigkeit ihrer Zerfallsprozesse erklärbar (Tab. 22).

Pionen (π-Mesonen) sind die Quanten des Kernfeldes und daher ein Bestandteil der Atomkerne, wie es die Nukleonen sind. Es lag nahe, die Unabhängigkeit der Kernkräfte von der elektrischen Ladung der Bausteine, die durch den Begriff des Isospins charakterisiert wird, auch auf die π-Mesonen zu übertragen. Für Nukleonen besitzt der Vektor des Isospins den Betrag $T = 1/2$; seine Projektion T_3 hat für das Proton den Wert $+1/2$, für das Neutron $-1/2$. Proton und Neutron bilden daher ein Dublett mit $|\boldsymbol{T}| = 1/2$. Für Pionen erhält man, den Begriff des Isospins auf sie entsprechend anwendend, ein Isotriplett und, entsprechend der Multiplizität $2T + 1$, wird $|\boldsymbol{T}| = 1$. π^+-Mesonen besitzen den Wert $T_3 = +1$, π^--Mesonen $T_3 = -1$ und π^0-Mesonen $T_3 = 0$.

Bevor wir auf die Kernwechselwirkung, schwere Elementarteilchen und deren weitere Eigenschaften eingehen, seien die bisher betrachteten Teilchen, die Leptonen, kurz systematisiert. Zu ihrer Charakterisierung wird die „Leptonenladung“ eingeführt, die eine Erhaltungsgröße ist. Aus Tabelle 23 sind die Eigenschaften der Leptonen zu entnehmen.

Tabelle 23. Leptonen

Wechselwirkung	Myonen	Elektronen		Elektronen	Myonen
Leptonenladung:	+1, Teilchen		0	−1, Antiteilchen	
Photonen			γ		
Neutrinos	ν_μ	ν_e		$\tilde{\nu}_e$	$\tilde{\nu}_\iota$
Elektronen		e^-		e^+	
Myonen	μ^+				μ^-

Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen

Von außerordentlicher Bedeutung für die Erforschung der Eigenschaften von Elementarteilchen sind, neben dem Studium ihrer Erzeugung und ihres Zerfalls, die Kenntnisse, die man aus Reaktionen zwischen ihnen gewinnen kann. Die großen Teilchenbeschleuniger liefern nicht nur Nukleonen (Protonen, Deuteronen, α-Teilchen usw.), sondern auch Strahlen von π^+- und π^--Mesonen und weiteren Elementarteilchen mit solchen Intensitäten, daß sie als Geschosse für Kernreaktionen verwendbar sind. Wichtige Eigenschaften der Mesonen und Elementarteilchen wie Parität und Isospin konnten mit Hilfe von derartigen Kernreaktionen ermittelt werden. Abbildung 55 zeigt ein stark vereinfachtes Schema des Synchrozyklotrons in Dubna. Die „Kanäle" für die verschiedenen Strahlenarten sind auf dem Bild zu erkennen. Große Beschleuniger, deren Energie zur Erzeugung schwererer Elementarteilchen ausreicht, besitzen weitere Kanäle für K-Mesonen, Hyperonen und Antiteilchen. Derartige Anordnungen sind oft sehr umfangreich

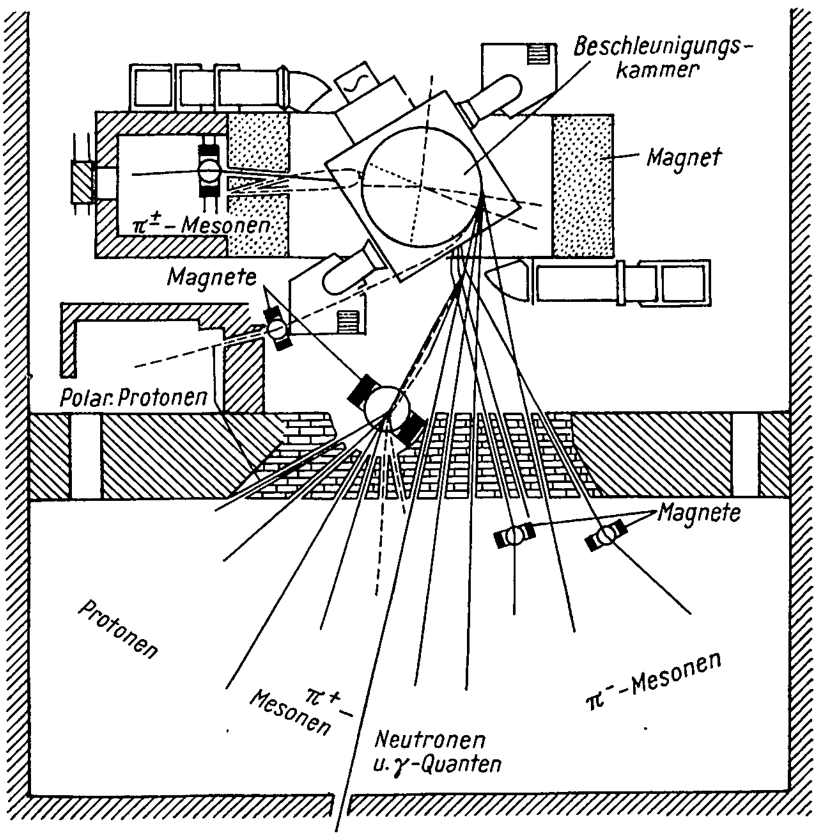


Abb. 55. Synchrozyklotron in Dubna mit Kanälen für verschiedene Teilchenarten

hinsichtlich ihrer Dimensionen und ihrer technischen Einrichtungen. Es ist daher naheliegend, mehrere Teilchenkanäle einzurichten, so daß gleichzeitig verschiedenartige Messungen durchgeführt und damit die kostspieligen Betriebszeiten großer Beschleuniger besser ausgenutzt werden können.

Wie oben gezeigt wurde, sind Reaktionen, die zur Erzeugung von π-Mesonen führen, durch folgenden Typ charakterisiert: $p + p \rightarrow p + n + \pi^+$. Das kann man allgemein schreiben, wenn N ein Nukleon bezeichnet: $N + N \rightarrow N + N + \pi$. Der Isospin gestattet, einen bequemen Formalismus für die Teilchenwechselwirkung herzuleiten. Für Nukleonen haben wir den Vektor des Isospins, $|\boldsymbol{T}| = 1/2$, bereits mehrfach verwendet, insbesondere wurde das System von zwei Nukleonen dargestellt. Für das System Neutron-Proton, $p + n$, erhielten wir $T_3 = 0$. Dieser Wert der Projektion kann von dem Vektor $|\boldsymbol{T}| = 0$ und auch $|\boldsymbol{T}| = 1$ erhalten werden. Das System $n + p$ kann daher durch zwei Werte des Vektors $\boldsymbol{T}$ charakterisiert werden, das System $p + p$ dagegen nur durch einen. Nach Ausweis der Experimente unterscheiden sich die Zustände der $(n + p)$-Wechselwirkung für $T = 1$ und $T = 0$ voneinander. Nicht nur der Isospin $\boldsymbol{T}$ ist eine Erhaltungsgröße bei der Wechselwirkung zwischen Nukleonen und Atomkernen, sondern auch seine Projektion T_3. Die Erhaltung der elektrischen Ladung Q und der Baryonenzahl B führt zu einer einfachen Beziehung zwischen diesen Größen und der Komponente T_3 des Isospins

$$Q = T_3 + \frac{B}{2}. \tag{14.5}$$

Wie man erkennt, gilt diese Beziehung auch für π-Mesonen, deren Baryonenzahl $B = 0$ ist. In Tabelle 24 sind die Werte des Isospins und seiner Projektion T_3 für einige Nukleonen- und Nukleon-Pion-Wechselwirkungen dargestellt.

Tabelle 24. Isospin für Systeme von zwei Teilchen

Isospin	$n + n$	$p + p$	$n + p$	$\pi^+ + p$	$\pi^- + p$	$\pi^+ + n$	$\pi^- + n$
T_3	-1	1	0	3/2	$-1/2$	1/2	$-3/2$
$\|\boldsymbol{T}\|$	1	1	0; 1	3/2	1/2; 3/2	1/2; 3/2	3/2

Die Bedeutung des Isospins tritt vor allem bei der Streuung von Pionen an Nukleonen klar hervor. Weiterhin liefern derartige Experimente wichtige Hinweise bezüglich der Struktur von Nukleonen sowie der „Resonanzen", die in der Elementarteilchenphysik großes Gewicht erlangt haben. Es seien die Prozesse $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$ und $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$ betrachtet, wobei im zweiten Falle noch die Reaktion $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ möglich ist. Abbildung 56 zeigt schematisch die gemessenen Streuquerschnitte als Funktion der Mesonenenergie. Die Wirkungsquerschnitte für beide Prozesse besitzen deutlich ausgeprägte Maxima: für π^+-Mesonen bei Energien von 190 und 1330 MeV und für π^--Mesonen bei den Energiewerten 190, 600 und 900 MeV. Im Bereich geringer Pionenenergien unterscheiden

sich die Querschnitte der beiden π-Mesonen-Arten erheblich, bei hohen Energien sind sie etwa gleich groß, Die Unterschiede in den Wirkungsquerschnitten der beiden π-Mesonen-Arten lassen sich durch den unterschiedlichen Isospin erklären. Das System $\pi^+ + \mathrm{p}$ hat den Wert $|\boldsymbol{T}| = 3/2$, während $\pi^- + \mathrm{p}$ die Werte $|\boldsymbol{T}| = 1/2$ und $3/2$ annimmt. Die Analyse der Energieabhängigkeit dieser Prozesse liefert eine gute Bestätigung für die Bedeutung des Isospin-Formalismus.

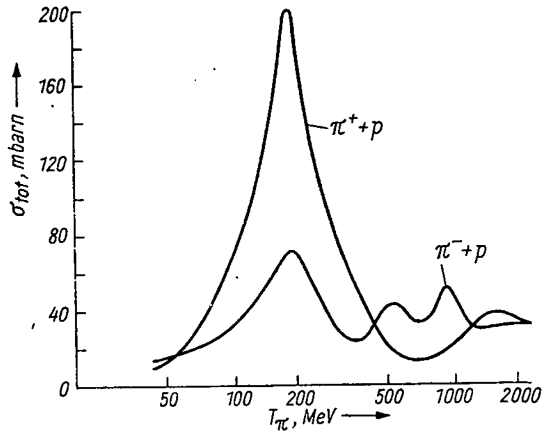


Abb. 56. (π^+—p)- und (π^-—p)-Streuung (nach Burrowes, Brisson, Derlin u. a.)

Die Maxima der Wirkungsquerschnitte bei der Streuung von π-Mesonen an Nukleonen werden „Nukleonen-Resonanzen" genannt. Die Resonanzen treten bei definierten Energie-, Spin- und Isospinwerten auf. Sie werden bei verschiedenartigen Prozessen für dieselben Energiewerte beobachtet. Auf weitere Einzelheiten der „Resonanzen" wird weiter unten eingegangen.

4.3. Struktur der Nukleonen

Längere Zeit bereitete es Schwierigkeiten, die Werte zu erklären, die experimentell für die magnetischen Momente von Proton und Neutron festgestellt worden sind: $\mu_\mathrm{p} = 2{,}79$ und $\mu_\mathrm{n} = -1{,}91$ Bohrsche Kernmagnetonen. Nach den theoretischen Folgerungen aus Diracs Theorie war für das Proton als magnetisches Moment 1 Bohrsches Kernmagneton, für das Neutron der Wert 0 zu erwarten.

Als fruchtbar erwies sich bei der Lösung dieses Problems die Erklärung der Kernwechselwirkungen durch Austauschkräfte, wobei die π-Mesonen die Rolle der Austauschquanten spielen. Hierdurch wird einmal die räumliche Ausdehnung der Nukleonen verständlich, zum anderen kann, da die π-Mesonen oftmals Ladungen tragen (π^+, π^- und π^0), eine ungleichmäßige Verteilung dieser Ladungen vor-

handen sein, was etwa so zu verstehen ist, daß „Wolken“ virtueller geladener oder ungeladener π-Mesonen das Nukleon umgeben. Eine Abschätzung des Radius derartiger Mesonenwolken ergibt ungefähr den Wert einer Compton-Wellenlänge des π-Mesons: $\hbar/m_\pi c = 1{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm. Es ist nunmehr verständlich, daß das Neutron, in genügend kleinem Abstand betrachtet, ebenfalls Ladungen besitzt, die sich, aus größerem Abstand gesehen, zu Null kompensieren. Neben anderen Verfahren (z. B. der Verwendung von Mesoatomen, bei denen ein Elektron zeitweise durch ein Meson ersetzt ist, was zu einer Röntgenstrahlung führt), auf die in diesem Zusammenhang nicht eingegangen wird, bietet die Streuung sehr energiereicher Elektronenstrahlen die Möglichkeit, Ladungsverteilungen in Nukleonen und Kernen abzutasten. Es handelt sich hierbei um die Arbeiten von HOFSTADTER, der in seinen Experimenten die Winkelabhängigkeit der Elektronenstreuung untersuchte. Diese ist für punktförmige Nukleonen als „Mott-Streuung“ theoretisch bekannt. Aus den Abweichungen von der berechneten Mott-Streuung kann die räumliche Verteilung von Ladungen und Strömen, die das magnetische Moment bilden, ermittelt werden.

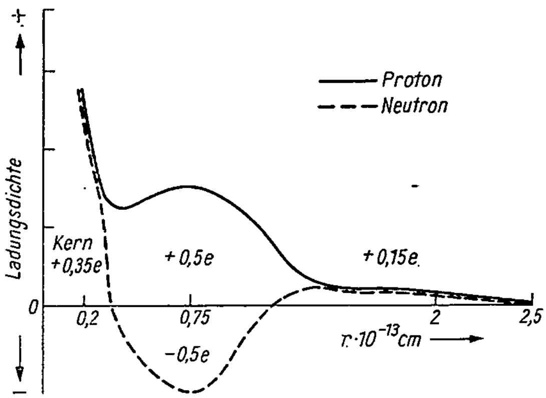


Abb. 57. Ladungsverteilung des Protons und des Neutrons

Abb. 57 zeigt die Ladungsverteilung von Proton und Neutron. Beide Nukleonen besitzen einen „Kern“, in dem der größte Teil ihrer Masse konzentriert ist und der bei beiden Nukleonen positive elektrische Ladung besitzt. Dieser hat einen Radius von etwa 0,2 Fermi. Weiter außerhalb des „Kerns“ ist die Ladung auf zwei „Wolken“ verteilt; die des Protons besitzt positive, die des Neutrons negative Ladungen. Diese Vorstellungen sind jedoch derzeit mit einiger Vorsicht aufzunehmen, weil einige neuere Messungen gegen die Existenz eines „Kernes“ sprechen bzw. nur wesentlich geringere „Kern“abmessungen zulassen. Schließlich sei erwähnt, daß von verschiedenen Seiten die Gültigkeit der Makro-Elektrodynamik für kleinere Dimensionen als die der Nukleonen angezweifelt wird. In diesem Falle ist die endliche Ausdehnung und eine Struktur der Nukleonen anzunehmen nicht notwendig.

14.4. Antiteilchen

Schon weiter oben wurde erwähnt, daß auf Grund von DIRACS Überlegungen die Existenz schwerer Antiteilchen möglich sein sollte. Derartige Antiteilchen, von denen eine erhebliche Anzahl gefunden worden ist, sollten gleiche Masse, Spins und Lebensdauer haben wie die gewöhnlichen Teilchen, jedoch entgegengesetzt gerichtete magnetische Momente und entgegengesetzte elektrische Ladungen. Ihre wesentlichste Eigenschaft ist jedoch, daß sich Teilchen und Antiteilchen gegenseitig vernichten, wobei ihre gesamte Ruhenergie $2\,Mc^2$ in andere Energieformen umgewandelt wird. Teilchen und Antiteilchen werden als „ladungskonjugiert" bezeichnet.

Der Prozeß der Teilchenvernichtung, der Annihilation, bei dem das Nukleon-Antinukleon-Paar in π-Mesonen und zu einem geringen Bruchteil in K-Mesonen zerfällt, soll nach denselben Gesetzen erfolgen wie die bisher betrachteten Kernprozesse. Demnach müssen die Erhaltungssätze gelten, insbesondere muß die Baryonenzahl erhalten bleiben. Bei der Annihilation von Nukleonen und Antinukleonen, die ja die Baryonenzahl $+1$ bzw. -1 haben, müssen Produkte mit der Baryonenzahl 0 entstehen. Unter anderem folgt hieraus für die Erzeugung eines Antinukleons, daß gleichzeitig ein Nukleon erzeugt werden muß, z. B.

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p} + \tilde{\mathrm{p}};$$
$$B = 1 + 1 = 1 + 1 + 1 - 1.$$

Die Schwellenenergie für diesen Prozeß der Erzeugung eines Proton-Antiproton-Paares läßt sich ähnlich berechnen wie die Schwellenenergie zur Erzeugung eines π-Mesons, die eingangs des Kap. 14.2. durchgeführt wurde. Man erhält für die Schwellenenergie des Geschoßprotons den Wert

$$T_{\mathrm{p\,min}} = \frac{(4\,M_{\mathrm{p}}c^2)^2 - (2\,M_{\mathrm{p}}c^2)^2}{2\,M_{\mathrm{p}}c^2} = 6M_{\mathrm{p}}c^2 \approx 5{,}6\,\mathrm{GeV}.$$

Bei anderen Prozessen zur Erzeugung von Antiprotonen bei schweren Kernen kann der Wert für $T_{\mathrm{p\,min}}$ tiefer liegen als oben berechnet, weil die Eigenenergie der Protonen im Kern in Rechnung zu setzen ist, jedoch geht diese Energieabnahme nur bis zu etwa 4 GeV.

Die Erzeugung von Antiprotonen gelang 1955 SEGRÉ und seinen Mitarbeitern, als ein Teilchenbeschleuniger mit Protonenenergien bis zu 6,3 GeV zur Verfügung stand. Bei (p—p)-Prozessen werden, wie wir früher sahen, Mesonen erzeugt, die den Nachweis der negative Ladung tragenden Antiprotonen sehr erschwerten (π^--Mesonen!). Die Ausbeute an π^--Mesonen ist bei den genannten Protonenenergien etwa $6 \cdot 10^4$ mal so groß wie die Ausbeute an Antiprotonen. Die geistvolle Anordnung der Meßvorrichtungen bedeutet einen Glanzpunkt der experimentellen Physik.

Antineutronen wurden ein Jahr später, 1956, durch CORK, LAMBERTSON, PICCIONI und WENTZEL entdeckt. Sie verwendeten einen Umladungsprozeß von Antiprotonen:

$$\tilde{p} + p \to \tilde{n} + n;$$

$$\tilde{p} + n \to \tilde{n} + n + \pi^-.$$

Erschwert wird die Beobachtung von Neutronen und somit auch von Antineutronen dadurch, daß sie als ladungslose Teilchen keine direkte elektromagnetische Wechselwirkung mit Materie (Ionisation) besitzen. Man mußte die bei ihrer Annihilation auftretenden Teilchen, π- und K-Mesonen, nachweisen. Auch dieses Experiment bedeutet eine glänzende Leistung der experimentellen Physik. Ebenso wie das Neutron ist auch das Antineutron instabil und zerfällt nach dem Schema

$$\tilde{n} \to \tilde{p} + e^+ + \nu, \qquad \tau_{\tilde{n}} = \tau_n = 1{,}01 \cdot 10^3\,\mathrm{s}.$$

Antiproton und Antineutron bilden ein Isodublett mit dem Isospin $T = 1/2$. Die Projektionen T_3 des Isospins sind:

$$(T_3)_{\tilde{p}} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad (T_3)_{\tilde{n}} = +\frac{1}{2}.$$

Von großer Bedeutung ist der Prozeß der Wechselwirkung von Antinukleonen mit Nukleonen. Die (p, $\tilde{p}$)- und (p, $\tilde{n}$)-Wechselwirkungen haben im Energiebereich von einigen GeV gleichgroße Wirkungsquerschnitte, die jedoch wesentlich größer sind als die der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung. Bei derartigen Prozessen wird eine größere Anzahl von geladenen und ungeladenen π-Mesonen erzeugt.

14.5. K-Mesonen und Hyperonen

Die großen wirtschaftlichen Perspektiven der Kerntechnik und der außerordentlich hohe erkenntnistheoretische Wert kernphysikalischer Forschung — man denke an die glänzende Bestätigung des Einsteinschen Gesetzes der Äquivalenz von Masse und Energie, an zahlreiche Bestätigungen der Relativitätstheorie im Gebiet der Korpuskeln hoher Energien und an den Nachweis der von der allgemeinen Relativitätstheorie geforderten Rotverschiebung der Spektren in Gravitationsfeldern, an die Entdeckung von Antimaterie, um nur einige Beispiele zu nennen — führten nach 1945 dazu, daß sich Begabte dem Studium dieser Disziplin zuwandten. Seit den fünfziger Jahren ist daher ein rasch wachsender Fortschritt auf diesem Gebiet zu verzeichnen. Unter anderem führte das zur Entwicklung neuer Methoden für die Beobachtung und Registrierung energiereicher Korpuskularstrahlen. Die Entdeckung der μ- und π-Mesonen gelang mit Hilfe der Kernphotoemulsionen, die Photoschichten erheblicher Dicke aufweisen. Ein wesent-

liches Merkmal dieser Methode ist, daß sie die Bahn einer Korpuskel über längere Bahnstrecken zu erkennen sowie Kernumwandlungsprozesse an den Bestandteilen der Photoemulsionen zu beobachten und messend zu verfolgen ermöglicht. Mit den elektrischen Methoden — Ionisationskammer, Zählrohr und Kristallzähler — lassen sich Ionisationseffekte von Teilchen und im Zusammenhang damit deren Ladung bzw. Energie messen. Die Feststellung der räumlichen Orientierung von Teilchenbahnen und der Reichweiten sowie andere Messungen können mit Hilfe der hochentwickelten Methoden von Blasenkammer, Funkenkammer und Teilchenspurenkammer erfolgen. Aus der Fülle der Einzelbeobachtungen auf dem

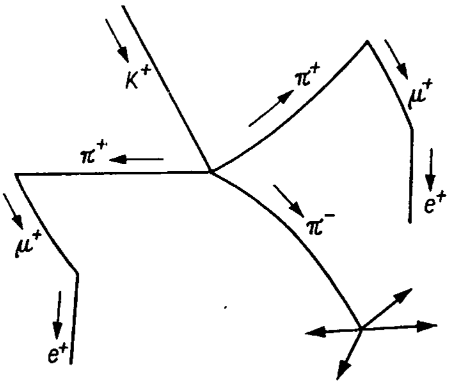


Abb. 58. Zerfall eines K⁻-Mesons (schematisch)

Gebiet der Elementarteilchen, deren Zahl zur Zeit auf etwa 300 angewachsen ist, sollen im folgenden nur einige allgemeinere Beispiele und Regeln zu ihrer Systematisierung behandelt werden.

Im Jahre 1949 wurde von Powell in der Kernemulsion ein neues Teilchen, das K^+-Meson, gefunden. Abbildung 58 zeigt die Bahn eines K^+-Mesons, das in der Photoemulsion abgebremst wird und dann zerfällt. Dieses Teilchen zerfällt, wie man aus den beobachteten Reichweiten und dem anschließenden Zerfall feststellen konnte, in drei π-Mesonen:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-.$$

Da das K^+-Meson nach dem Verlust seiner kinetischen Energie zerfällt, läßt sich seine Masse aus den Daten der beobachteten Zerfallmesonen berechnen:

$$m_{K^+}c^2 = 2m_{\pi^+}c^2 + m_{\pi^-}c^2 + Q.$$

Hierbei bedeutet Q die Summe der kinetischen Energie der π-Mesonen. Die Masse des K^+-Mesons beträgt 493,82 MeV, seine mittlere Lebensdauer $1{,}236 \cdot 10^{-8}$ s.

Nach Fertigstellung der großen Beschleuniger, zunächst in Brookhaven und dann in Berkeley, bestanden wesentlich bessere Möglichkeiten, geeignete Versuchsbedingungen zur Beobachtung der Elementarteilchen auszuwählen. Es sei darauf hingewiesen, daß mehrere Elementarteilchen — Positron, μ- und π-Mesonen,

K-Mesonen und einige Hyperonen — bei Messungen aus der kosmischen Strahlung ermittelt worden waren. Ungleich raschere Erfolge in der Physik der Elementarteilchen wurden jedoch erst nach der Inbetriebnahme der obengenannten und weiterer großer Teilchenbeschleuniger gewonnen. Die K-Mesonen und die weiter unten zu besprechenden Hyperonen werden „seltsame Teilchen", Strange Particles, genannt. Gell-Mann, der die Bezeichnung „Strangeness" einführte, weil diese Teilchen unter anderem verschiedenartige Bildungs- und Zerfallsgesetze besitzen, gelang es, sie nach einem Schema, unter Einführung einer neuen Ordnungs- und Erhaltungsgröße, der Strangeness, zu ordnen. Neben dem Zerfall des K^+-Mesons in drei Pionen wurde bald der Zerfall $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ beobachtet. Weitere Zerfälle wurden unter schwacher Wechselwirkung, $K^+ \rightarrow \mu^+ + \pi^0 + \nu$, festgestellt. Während die drei Zerfälle ursprünglich verschiedenartigen Teilchen zugeordnet waren (τ-, Θ-, $\varkappa$-Meson), zwang die Gleichheit der Lebensdauern und der Massen zu dem Schluß, daß es sich in allen drei Fällen um dasselbe Teilchen, das K^+-Meson, handelt, das verschiedenartige Zerfallsmöglichkeiten hat.

Diese Vorstellung führte jedoch bald zu Schwierigkeiten, denn aus den Zerfällen

$$K^+(\tau^+) \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \quad \text{und} \quad K^+(\Theta^+) \rightarrow \pi^+ + \pi^0$$

folgt durch Bestimmung der Parität der Zerfallsprodukte (für π-Mesonen ist $P = -1$), daß diese von Ausgangsteilchen entgegengesetzter Parität herrühren. Nach zahlreichen Versuchen, diesen Widerspruch zu klären, wurde 1956 von Lee und Yang die Annahme gemacht, daß im Falle schwacher Wechselwirkungen der Satz von der Erhaltung der Parität nicht erfüllt ist. Sie konnten zeigen, daß dann alle Schwierigkeiten bezüglich der Deutung von Prozessen mit K-Mesonen und Hyperonen behoben sind.

Die Nichterhaltung der Parität beim Zerfall der K-Mesonen führte zu der Überlegung, daß möglicherweise auch die schwache Wechselwirkung beim β-Zerfall nichtstabiler Kerne unter Nichterhaltung der Parität stattfindet. Bereits 1957 gelang C. S. Wu und ihren Mitarbeitern der Nachweis für die Nichterhaltung der Parität beim β-Zerfall und im selben Jahre Garwin, Ledermann und Weinrich für den π-μ-e-Zerfall. Eine der feldtheoretischen Folgerungen hieraus zieht in Betracht, daß bei Änderung der Parität eine Vorzeichenänderung der Ladung, d. h. der Übergang eines Teilchens in ein Antiteilchen, erfolgen muß. In diesem Falle bleiben die Symmetrieeigenschaften erhalten. Als Erhaltungsgröße ist die „kombinierte Parität", also das Produkt $C \cdot P$, zu betrachten. Warum eine solche Kombination zur Erhaltung der Symmetrieeigenschaften notwendig ist, wird erst durch weitere Erforschung des Zusammenhanges zwischen Materie und Antimaterie geklärt werden können.

(Ohne daß es der Aufgabe dieser Schrift entspricht, auf die feldtheoretischen Betrachtungen der Symmetrieeigenschaften der Materie einzugehen, sei in diesem Zusammenhang kurz mitgeteilt, daß die obenerwähnte Erhaltung der kombinierten Parität $C \cdot P$ ein Spezialfall des von Lüders und Pauli aufgestellten CPT-Theorems ist. Hiernach müssen die Wellengleichungen ihre Invarianz bei gleichzeitiger Durchführung von drei Transformationen behalten: 1. P-Transformation, wobei P die Parität bedeutet, 2. Zeitumkehr T und 3. Ladungskonjugation, also wenn beispielsweise Elektronen durch Positronen ersetzt werden.)

Die wichtigsten Zerfallsprozesse der geladenen K-Mesonen sind:

$$K^{\pm} \rightarrow \begin{cases} \rightarrow \mu^- + \nu & 63{,}4\% \\ \rightarrow \pi^{\pm} + \pi^0 & 21{,}1\% \\ \rightarrow \pi^{\pm} + \pi^- + \pi^+ & 5{,}57\% \\ \rightarrow e^{\pm} + \pi^0 + \nu & 4{,}80\% \\ \rightarrow \mu^{\pm} + \pi^0 + \nu & 3{,}40\% \\ \rightarrow \pi^{\pm} + \pi^0 + \pi^0 & 1{,}71\%. \end{cases}$$

Beobachtungen an K^--Mesonen sind schwierig, da diese nur in geringer Anzahl auftreten und in starker Wechselwirkung mit Materie stehen.

Schon frühzeitig, im Jahre 1951, wurden bei der Untersuchung kosmischer Strahlung in der Wilson-Kammer sogenannte V-Ereignisse gefunden. Das sind Teilchenbahnen, die gabelförmig von einem gemeinsamen Ausgangspunkt in der Kammer ausgehen. Sie sind zu deuten als Kernreaktionen mit zwei Teilchen im Ausgangskanal der Reaktion, die durch ungeladene Teilchen, beispielsweise Neutronen, hervorgerufen werden. Die Analyse derartiger Ereignisse führte zunächst zu zwei Möglichkeiten des Zerfalls, die sich durch ihre Energietönung — 38 MeV bzw. 219 MeV — wesentlich unterschieden. Nachdem man im zweiten Fall die Ausgangsteilchen als π-Mesonen identifiziert hatte, erwies sich das neutrale Teilchen hier als ein K^0-Meson, da seine Masse (497,9 MeV) der eines $K^{\pm}$-Mesons (493,8 MeV) sehr nahekommt. Verläuft nämlich die Reaktion nach dem Schema

$$\Theta^0 \; (= K^0{}_{\text{short}}) \rightarrow \pi^+ + \pi^-; \qquad Q = 219 \text{ MeV},$$

so ergibt sich als Masse des neutralen Teilchens, das zu dem genannten Zerfall führt,

$$m_{K^0} = 2 m_\pi + Q \approx 500 \text{ MeV}.$$

Seine Lebensdauer wurde zu $0{,}87 \cdot 10^{-10}$ s ermittelt.

Für die zweite Art des V-Zerfalls ergab die Analyse der Bahnspuren im Magnetfeld, daß dieser Prozeß durch ein neutrales Teilchen größerer Masse, das ungeladene Λ-Teilchen, hervorgerufen wird:

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^-; \qquad Q = 38 \text{ MeV}.$$

Die Masse des Λ-Teilchens beträgt 1115,58 MeV, seine Lebensdauer $2{,}54 \cdot 10^{-10}$ s. Wegen ihrer Massen, die die eines Nukleons übersteigen, werden Λ-Teilchen und die weiter unten zu besprechenden Teilchen dieser Gruppe „Hyperonen" genannt.

Außer dem neutralen Λ-Hyperon wurden in der kosmischen Strahlung und an den Beschleunigern geladene Hyperonen gefunden, das Σ^+- und das Σ^--Hyperon, die nach folgendem Schema zerfallen:

$$\Sigma^+ \rightarrow \begin{cases} p + \pi^0 \\ n + \pi^+ \end{cases}; \qquad \Sigma^- \rightarrow n + \pi^-.$$

Ein weiteres Hyperon, das Ξ^--Hyperon, zerfällt nach dem Schema:

$$\Xi^- \to \Lambda + \pi^-, \qquad \Lambda \to p + \pi^-.$$

Wegen der zwei aufeinanderfolgenden Zerfälle wird es auch Kaskaden-Hyperon genannt. Weiterhin wurden zwei neutrale Hyperonen, die theoretisch vorausgesagt waren, gefunden:

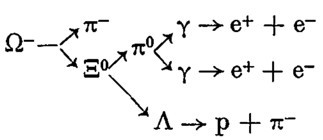
$$\Sigma^0 \to \Lambda + \pi^0; \qquad Q = 77 \text{ MeV}$$

und $$\Xi^0 \to \Lambda + \pi^0; \qquad Q = 64 \text{ MeV}.$$

Tabelle 25. K-Mesonen und Hyperonen

Bezeichnung	Masse · $1/c^2$ MeV	τ s	Spin, Parität s^P	Isospin T	Strangeness S
K	493,82	$1{,}236 \cdot 10^{-8}$	0^-	1/2	1; −1
K^0_{short}	497,87	$0{,}87 \cdot 10^{-10}$	0^-	1/2	1
K^0_{long}	497,87	$5{,}73 \cdot 10^{-8}$	0^-	1/2	−1
η	548,6	(10 MeV)	0^+	—	0
Λ	1115,58	$2{,}54 \cdot 10^{-10}$	$1/2^+$	0	−1
Σ^+	1189,47	$0{,}810 \cdot 10^{-10}$	$1/2^+$	1	−1
Σ^0	1192,56	$1{,}0 \cdot 10^{-14}$	$1/2^+$	1	−1
Σ^-	1197,44	$1{,}65 \cdot 10^{-10}$	$1/2^+$	1	−1
Ξ^0	1314,7	$3{,}0 \cdot 10^{-10}$	$1/2^+$	1/2	−2
Ξ^-	1321,2	$1{,}74 \cdot 10^{-10}$	$1/2^+$	1/2	−2
Ω^-	1674	$1 \cdot 10^{-10}$	$3/2^+$	0	−3

Die Werte der Massen und Lebensdauern von Hyperonen sind in Tabelle 25 verzeichnet. Aus den Schemata des Zerfalls der Hyperonen folgt, daß ihre Baryonenzahl $B = 1$ ist, ihr Spin 1/2; sie sind also „Fermionen“. Für die Hyperonen sind die entsprechenden Antiteilchen nachgewiesen worden. Das zuletzt gefundene Ω^--Hyperon hat eine Masse von 1674 MeV und eine Lebensdauer von $1 \cdot 10^{-10}$ s. Es zerfällt nach folgendem kompliziertem Schema:



Analysiert man die Reaktionen, die zur Bildung von K-Mesonen einerseits und zu Hyperonen andererseits führen, so findet man ein völlig unterschiedliches Verhalten gegenüber den bisher betrachteten Reaktionen für die Bildung und für den Zerfall der Teilchen. Die Lebensdauern von K-Mesonen liegen zwischen 10^{-8} und 10^{-10} s. Da die Kernwechselwirkung in der Zeit von etwa 10^{-22} s erfolgt, liegen dem-

nach für den Zerfall dieser Teilchen schwache Wechselwirkungen vor. Das ist unerwartet, denn beim Zerfall treten Teilchen (π-Mesonen und Nukleonen) auf, die starke Wechselwirkungen besitzen. Ein Zerfall dieser Teilchen unter schwacher Wechselwirkung, also in Elektronen und Neutrinos, wäre verständlicher. Daher wurde für K-Mesonen die Bezeichnung „seltsame Teilchen" gewählt und ihnen, im Einklang mit ihren Reaktionen, die „Strangeness" S zugeordnet, die eine Erhaltungsgröße ist. K-Mesonen und Hyperonen treten bei ihrer Bildung immer paarweise auf, z. B.

$$\pi^- + p \to \Lambda + K^\circ;$$
$$\pi^- + p \to \Sigma^- + K^+;$$
$$\pi^- + p \to \Sigma^\circ + K^\circ.$$

Wie bereits gezeigt wurde, konnte mit der Beziehung (14.5) $Q = T_3 + B/2$ das Zustandekommen eines Dubletts von Nukleonen und eines Tripletts von π-Mesonen erklärt werden. Diese Beziehung wurde durch Einführung der „Strangeness" modifiziert und führte zu folgender Beziehung (GELL-MANN, NAKANO und NISHIJIMA):

$$Q = T_3 + \frac{B + S}{2}, \tag{14.6}$$

wo Q die elektrische Ladung, T_3 die Projektion des Isospins, B die Baryonenzahl und S die Strangeness bedeutet. Da für starke sowie für elektromagnetische Wechselwirkung $\Delta T_3 = 0$, $\Delta Q = 0$ und $\Delta B = 0$ ist, folgt aus Gl. (14.6), daß auch $\Delta S = 0$ wird. Auf diese Weise ergeben sich folgende Auswahlregeln für Kernprozesse, z. B. für den Zerfall des Hyperons Σ°:

$$\begin{aligned} &\Sigma^\circ \to \Lambda + \gamma \\ T_3 &= 0 \to 0 + 0; \\ B &= 1 \to 1 + 0; \\ S &= -1 \to -1 + 0. \end{aligned}$$

Als Beispiel für einen der zahlreichen Bildungsprozesse von K-Mesonen und Hyperonen diene folgender Vorgang:

$$\begin{aligned} &\pi^- + p \to \Sigma^\circ + K^\circ \\ T_3 &= -1 + \frac{1}{2} \to 0 - \frac{1}{2}; \\ B &= 0 + 1 \to 1 + 0; \\ S &= 0 + 0 \to -1 + 1. \end{aligned}$$

Als sehr bedeutsam für die Erforschung der Hyperonen erwies sich die Entdeckung von DANYSZ und PNIEWSKI (1953), daß sich „Hyperfragmente" bilden können, bei denen ein Nukleon durch ein Λ-Teilchen ersetzt ist. Festgestellt und

ausgemessen wurden sie in der Photoemulsion. Beispielsweise zerfällt ein Hyperfragment ${}^4_2\text{He}$ bei der Abbremsung in der Photoemulsion nach Verlust seiner kinetischen Energie in drei Bestandteile (Spuren in der Photoemulsion), die folgendem Zerfallsschema entsprechen:

$$_{\Lambda}{}^4_2\text{He} \rightarrow {}^3_2\text{He} + \text{p} + \pi^-, \qquad Q = 44\,\text{MeV}.$$

Weitere Beispiele:

$$_{\Lambda}{}^3_1\text{H} \rightarrow (\text{p} + \text{n} + \Lambda); \qquad _{\Lambda}{}^4_1\text{H} \rightarrow (\text{p} + 2\text{n} + \Lambda) \quad \text{usw.}$$

Das Λ-Hyperon tritt, wie bei dem ersten Beispiel, als Zerfallsprodukt nicht immer auf, sondern zerfällt in $\text{p} + \pi^-$. Die Lebensdauer der unterdessen in größerer Anzahl festgestellten Hyperfragmente liegt in der Größenordnung von 10^{-10} bis 10^{-11} s.

Einige Zeilen seien in diesem Zusammenhang noch den K^0-Mesonen gewidmet, die ein sehr merkwürdiges und daher interessantes Verhalten zeigen. Aus Tabelle 25 entnimmt man, daß es zwei ladungskonjugierte K-Mesonen gibt, K^0 und $\tilde{\text{K}}^0$, die die Strangeness $S = +1$ und -1 haben. Diese werden als K^0_1 und K^0_2 oder $\text{K}^0_{\text{short}}$ und K^0_{long} bezeichnet. Zu diesem Resultat gelangte man nach längeren theoretischen Diskussionen, auf Grund derer eine Anzahl von Experimenten, unter anderen von Pontecorvo und seinen Mitarbeiten, in Dubna durchgeführt wurde. Auf Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden.

Die Klassifizierung der Strange Particles durch Gell-Mann und Nishijima führte nicht nur zur Ordnung der Teilchen, sondern ermöglichte auch die Voraussage der Existenz von Teilchen, deren Nachweis erst später gelang. Die Strangeness soll bei starken Wechselwirkungen erhalten bleiben, bei schwachen Wechselwirkungen, beim Zerfall, kann sie sich um $\Delta S = \pm 1$ ändern, z. B.:

$$\Lambda \rightarrow \text{p} + \pi^-.$$

Die im folgenden noch etwas zu beleuchtende Klassifikation der Elementarteilchen ist durch die Natur ihrer Wechselwirkungen begründet. Von wesentlicher Bedeutung für die Prozesse der Bildung und des Zerfalls von Elementarteilchen sind drei Arten von Wechselwirkungen. Es sind die starken (Nukleonen-), die elektromagnetischen und die schwachen Wechselwirkungen.

Die starke Wechselwirkung, die in der kurzen Zeit von etwa 10^{-22} s erfolgt, bewirkt erhebliche Reaktionsquerschnitte in der Größenordnung von 1 mbarn. Die für starke Wechselwirkung charakteristische Konstante g hat einen großen Wert; es gilt

$$\frac{g^2}{\hbar c} \approx 15.$$

Als Erhaltungsgrößen gelten die Parität, der Isospin, dessen Komponente T_3 und die Strangeness.

Die elektromagnetischen Wechselwirkungen sind schwächer als die starken Wechselwirkungen. Sie werden durch die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante bestimmt:

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

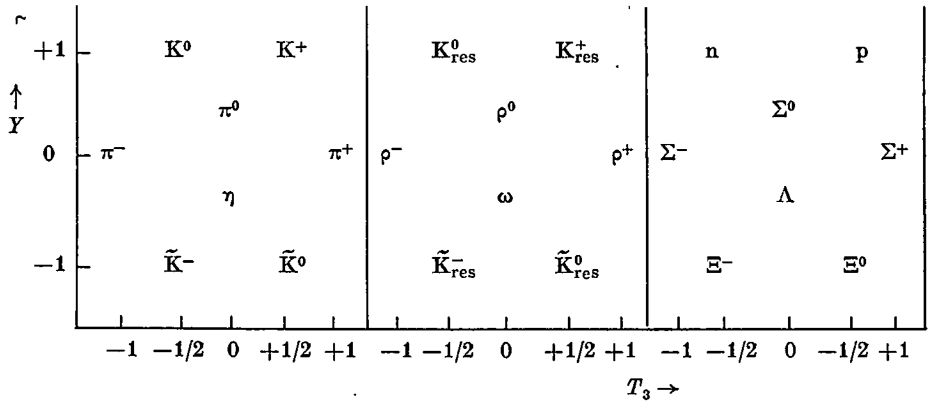
Die Zeitdauer derartiger Prozesse ist in der Größenordnung von 10^{-19} s, erreicht jedoch auch wesentlich höhere Werte (γ-Emission etwa 10^{-14} bis 10^{-8} s). Erhaltungsgrößen sind die Parität, die Projektion T_3 des Isospins und die Strangeness; der Isospin selbst ist keine Erhaltungsgröße.

Schwache Wechselwirkungen — β-Zerfall — sind durch die sehr kleine Konstante

$$\frac{l^2}{\hbar c} \approx 10^{-13}$$

und sehr geringe Wirkungsquerschnitte von der Größenordnung 10^{-43} cm² charakterisiert. Die Zerfallszeiten sind größer als 10^{-10} s, erreichen bei niedrigen Energien jedoch sehr hohe Werte (z. B. Zerfall des Neutrons in etwa 10^3 s). Man unterscheidet Prozesse schwacher Wechselwirkung, bei denen die Leptonenladung erhalten bleibt, und solche, die durch die Strangeness klassifiziert werden und unter Änderung dieser Größe erfolgen, z. B. der Zerfall $K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$, wobei die Strangeness sich von $+1$ zu 0 ändert.

Tabelle 26. Gruppen von Elementarteilchen nach GELL-MANN
Hyperladung Y = Baryonenzahl B + Strangeness S



Oktett-Gruppe der Mesonen	Oktett-Gruppe der Mesonen und Resonanzen	Oktett-Gruppe der Baryonen
$s = 0;\ P = -1$	$s = 1;\ P = -1$	$s = 1/2;\ P = +1$

Für Photonen und π-Mesonen existiert kein Erhaltungssatz bezüglich der Baryonen- oder Leptonenzahl. Sie können daher in beliebiger Anzahl erzeugt werden.

Von GELL-MANN und NE'EMAN wurden die Elementarteilchen unter folgenden Gesichtspunkten systematisch geordnet (Tab. 26): Sie vereinigten sie zu Gruppen mit gleichen Spinwerten und mit gleicher Parität. Die Teilchen innerhalb einer derartigen Gruppe wurden nach ihrer „Hyperladung“, das ist die Summe von Baryonenzahl plus Strangeness, $Y = B + S$, unterschieden. Dementsprechend

ergeben sich vier Gruppen von Elementarteilchen:

1. Photonen $s = 1$;
2. Leptonen $s = 1/2$;
3. Mesonen $s = 0, 1$;
4. Baryonen $s = 1/2, 3/2$.

Die Mesonen und ihre Resonanzen (s. weiter unten) bilden zwei Oktett-Gruppen mit negativer innerer Parität und den Spinwerten $s = 0$ bzw. $s = 1$.

Auf Grund der Formel von GELL-MANN und NISHIJIMA,

$$Q = T_3 + \frac{B+S}{2} = T_3 + \frac{Y}{2},$$

ergibt sich folgende Systematik für Mesonen, bei denen $B = 0$ ist: Für $S = 0$ wird $Q = T_3$. Mit $T = 1$ nimmt T_3 die drei Werte 1, 0, -1 an, wodurch das Isotriplett der π-Mesonen, π^+, π^- und π^0, charakterisiert ist. $T_3 = 0$ entspricht dem η-Teilchen. Für $S = \pm 1$ ergibt sich $Q = T_3 + 1/2$, und dementsprechend erhält man die beiden Dubletts K^+, K^0 und K^-, K^0. Die Klassifikation nach Ladung, Isospin und Strangeness, wie sie soeben ausgeführt wurde, reicht jedoch nicht aus. Es muß auch die innere Struktur der Teilchen, durch Spin und Parität charakterisiert, berücksichtigt werden. Die diskutierte Anordnung bezog sich auf Mesonen mit dem Spin 0 und negativer Parität, also 0^- ($J = 0$, $P = -1$). Das entsprechende Schema für den Spin 1 und negative Parität (1^-) ist ebenfalls in Tabelle 26 dargestellt.

Die weiteren Gruppen sind Baryonen-Gruppen. Alle Baryonen, außer dem Proton, sind instabil.

Auf dem Gebiet der Physik der Elementarteilchen erscheint derzeit die Untersuchung besonders kurzlebiger Zustände, der Resonanzzustände, außerordentlich vielversprechend. Die Resonanzzustände (oder kurz: Resonanzen) wurden bei der Untersuchung von Teilchen mit starker Wechselwirkung gefunden (siehe (π — p)-Streuung, Kap. 14.2.); sie stellen eine sehr kurzlebige Verbindung mehrerer Elementarteilchen dar. Außer den an der zitierten Stelle gezeigten Resonanzen wurden derartige Erscheinungen als π-, K- und Hyperonen-Resonanzen gefunden. Die Energie einer Resonanz bestimmt man aus der relativistischen Invarianzbeziehung

$$M c^2 = \sqrt{U^2 - p^2 c^2},$$

wo U und p die Gesamtenergie bzw. den Gesamtimpuls der miteinander reagierenden Teilchen bedeuten, z. B. Proton und π-Meson. Man erhält

$$M c^2 = \sqrt{U^2 - p^2 c^2} = m_p c^2 + m_\pi c^2 + T_{\text{res}}.$$

T_{res} ist die kinetische Energie von π-Meson plus Proton an der Resonanzstelle, im Schwerpunktsystem gemessen. Als Beispiel für eine Resonanz sei die erste Nukleonenresonanz, die als Δ-Resonanz bezeichnet wird, genannt. Sie wurde bei der obenerwähnten (π–p)-Streuung beobachtet. Die theoretische Analyse ergab einen Spin $J = 3/2$ und einen Isospin $T = 3/2$. Aus $T = 3/2$ folgt, daß die

Δ-Resonanz ein Quartett, $(2T + 1)$, bildet. Derartige Resonanzen besitzen, wie schon in Kap. 14.2 erwähnt wurde, definierte Eigenschaften von Masse usw., wie sie auch zur Charakterisierung der Elementarteilchen, die ja wesentlich längere Lebensdauer besitzen, mit Erfolg bestimmt werden.

Δ-Resonanz läßt sich auch durch verschiedene andere Reaktionen, z. B. $\pi^+ + p$ und $K^+ + p$, erzeugen. Teilchen, die durch starke Wechselwirkung gekennzeichnet sind, und entsprechende Resonanzen wurden bereits in großer Zahl gefunden. Sie werden unter der gemeinsamen Bezeichnung „Hadronen" zusammengefaßt. Als mathematische Grundlage für die von GELL-MANN angegebene Einordnung der Elementarteilchen in Gruppen diente die Gruppentheorie, und zwar wurden die Lieschen Gruppen und die Algebra von Lie verwendet. Danach trifft man die einfachste Form der Algebra von Lie in der Quantenmechanik, denn sie betrifft die Beziehung zwischen drei Komponenten, deren jede eine symmetrische Operation bedeutet. Ein solcher Fall liegt beispielsweise beim Isospin $\boldsymbol{T}$ sowie beim Gesamtspin $\boldsymbol{J}$ vor, deren Komponenten T_1, T_2, T_3 bzw. J_1, J_2, J_3 den Regeln dieser Algebra in ihrer einfachsten Form, der SU(2)-Gruppe, folgen (Matrizen der Dimension $2 \cdot 2$). Für die Ordnung der Achtergruppen bedarf es der nächst komplizierteren Gruppe der Lieschen Algebra, die acht unabhängige Komponenten besitzt. Dies ist die SU(3)-Gruppe von Matrizen der Dimension $3 \cdot 3$. (SU bedeutet spezielle unitäre Gruppe.) Diese und die SU(6)-Gruppe haben sich bei der Ordnung und Systematisierung der Elementarteilchen und Resonanzen weitgehend bewährt.

Von erheblichem Interesse sind die Überlegungen und Versuche, die Elementarteilchen als Verbindungen einer begrenzten Zahl von einfacheren Teilchen anzusehen. Schon 1959 wurde von FERMI und YANG die Frage gestellt, ob π-Mesonen nicht als gebundene Zustände von Nukleonen und Antinukleonen anzusehen seien. Die Anziehungskräfte zwischen beiden Teilchen müßten dann außerordentlich groß sein, und fast die ganze Masse sollte dafür verwendet werden: $E_{\text{Bindung}} = 2M_{\text{N}} - m_\pi$. Eine derartig hohe Bindungsenergie könnte bei einer Tiefe der Potentialmulde von etwa 30 GeV und einem Radius von der Größenordnung der Compton-Wellenlänge des Nukleons ($\approx 10^{-17}$ cm) erreicht werden. Mit der Entdeckung immer neuer Teilchen wurden ähnliche Vorstellungen, insbesondere von SAKATA, wieder aufgenommen.

Nach den Modellvorstellungen von SAKATA sollen alle Teilchen aus drei fundamentalen Teilchen — Λ, p und n — aufgebaut sein. Auf Grund der starken Anziehungskräfte zwischen diesen Teilchen und ihren Antiteilchen lassen sich die weiteren Teilchen finden. Wie SAKATA sich den Bau von Mesonen und Hyperonen vorstellte, sei an einigen einfachen Beispielen gezeigt:

$$T = 1 \begin{cases} \pi^+ = \mathrm{p}\tilde{\mathrm{n}}, \\ \pi^- = \tilde{\mathrm{p}}\mathrm{n}, \\ \pi^0 = \dfrac{\mathrm{p}\tilde{\mathrm{p}} - \mathrm{n}\tilde{\mathrm{n}}}{\sqrt{2}}; \end{cases} \qquad T = \frac{1}{2} \begin{cases} \mathrm{K}^+ = \mathrm{p}\tilde{\Lambda}, \\ \mathrm{K}^0 = \mathrm{n}\tilde{\Lambda}, \\ \mathrm{K}^- = \tilde{\mathrm{p}}\Lambda, \\ \mathrm{K}^0 = \tilde{\mathrm{n}}\Lambda; \end{cases}$$

$$T = 1 \quad \text{für} \quad \Sigma = \Lambda\pi; \quad T = 1/2 \quad \text{für} \quad \Xi = \Lambda\Lambda\tilde{\mathrm{n}}.$$

Die Strangeness wird durch die Anzahl der in den Teilchen vorhandenen Λ-Hyperonen bestimmt.

Das Schema von SAKATA ist deshalb von hohem Interesse, weil es mit einer Mindestzahl von fundamentalen Teilchen für den Aufbau der Elementarteilchen auskommt. Es gelingt damit jedoch nicht, eine richtige Anzahl von Multipletts der Baryonen anzugeben. Wegen dieser und anderer Schwierigkeiten — daß z. B. zum Verständnis des Aufbaues einiger Baryonenmultipletts zwei Dreierkombinationen von p, n, Λ und $\tilde{p}$, $\tilde{n}$, $\tilde{\Lambda}$ notwendig sind — stellte GELL-MANN und unabhängig von ihm ZWEIG 1964 eine Hypothese auf, nach der die Elementarteilchen und die Resonanzen aus drei fundamentalen Teilchen (oder Polen) mit nichtganzzahligen Quantenzahlen bestehen könnten. GELL-MANN nannte diese Teilchen „Quarks" und ordnete ihnen folgende Werte für B, Z und Y zu:

	q_1	q_2	q_3
B	1/3	1/3	1/3
Z	2/3	−1/3	−1/3
Y	1/3	1/3	−2/3
$T_3 = Z - \frac{Y}{2}$	1/2	−1/2	0
$\lvert \boldsymbol{T} \rvert$	1/2	1/2	0
$S = Y - B$	0	0	−1

Mit diesen drei Werten für B, Z und Y lassen sich mit Hilfe der Quarks beliebige Hadronen konstruieren. Die Physiker, die auf dem Gebiet höchster Energien arbeiten, sind eifrig bemüht, die Existenz von Quark-Teilchen nachzuweisen. Es ist jedoch die Frage, ob es sich hierbei um Teilchen handelt, die sich als selbständige Bestandteile aus ihrem Verband herauslösen lassen. Es ist von allergrößtem Interesse, festzustellen, ob die aus dieser Hypothese folgende Unterteilung elekrischer Ladungen in $e/3$ und $2e/3$ sowie eine Baryonenzahl von 1/3 möglich ist.

Mit dem Apparat der Gruppentheorie wurde von GELL-MANN und NE'EMAN das Zustandekommen der Teilchengruppen behandelt. Wahrscheinlich charakterisieren die erfolgreiche SU(3)-Gruppe und kompliziertere Gruppen keine Fundamentaleigenschaften der Teilchen. Gleichwohl wurden mit Hilfe dieser Gruppen wichtige Ergebnisse hinsichtlich der Klassifikation von Teilchen und Resonanzen erreicht.

Neben diesen Ordnungsprinzipien auf der Basis gruppentheoretischer Überlegungen werden von HEISENBERG und seinen Mitarbeitern sowie teilweise von IWANENKO feldtheoretische Überlegungen mit nichtlinearen Wellengleichungen verfolgt. Die Materiegleichung, d. h. eine Gleichung, die das Verhalten der gesamten Materie dazustellen gestattet, macht eindeutige Aussagen, wenn die Randbedingungen fixiert und kosmologische Grundforderungen eingearbeitet sind (HEISENBERG 1964). Das Massenspektrum stark wechselwirkender Teilchen läßt

sich ableiten, jedoch sind angeregte Zustände — und als angeregte Zustände der Materie, analog zur Anregung von Atomen, lassen sich Elementarteilchen möglicherweise auffassen — noch nicht errechnet worden. Die Energien für die Wechselwirkung ergeben sich in der richtigen Größenordnung, und auch das Photon kann durch die Theorie behandelt werden, somit auch die Elektrodynamik, wobei die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante größenordnungsmäßig richtig erhalten wird. Somit beschreibt Heisenbergs Theorie eine Reihe von Erscheinungen der Elementarteilchen richtig. Eindrucksvoll ist die Idee, aus einem einheitlichen feldtheoretischen Gesichtspunkt heraus nicht nur die Fülle der Erscheinungen bei Elementarteilchen, sondern auch das kosmische Geschehen verstehen zu wollen. Die schwierige Durchführung des mathematischen Teils der Theorie und das Auffinden der richtigen Randbedingungen stellen gegenwärtig eine riesige Aufgabe dar.

ANHANG I

Einige relativistische Beziehungen

Das Koordinatensystem x, y, z sei festgehalten, und das System x', y', z' bewege sich gegenüber dem ersten System mit der Geschwindigkeit βc ($\beta = v/c$ ist das Verhältnis von Geschwindigkeit zu Lichtgeschwindigkeit). Die Bewegung

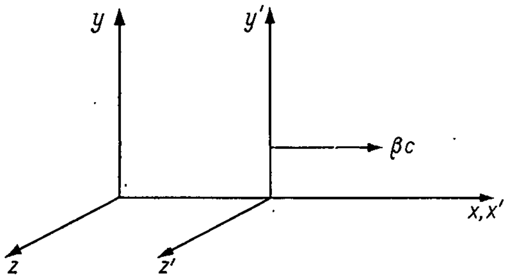


Abb. 59. Zur Lorentz-Transformation

erfolge in der x-Richtung (Abb. 59). Die Transformationsgleichungen von Lorentz haben dann die Form

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}; & x &= \frac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ y' &= y; \\ z' &= z; \\ ct' &= \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}; & ct &= \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{I.1}$$

Sind die obenstehenden Gleichungen erfüllt, so sagt man, die Größen x, y, z, ct und x', y', z', ct' bilden Vierervektoren. Betrachtet ein Beobachter, der sich im Anfang des ruhenden Systems befindet ($x = 0$) einen zweiten, der sich im Anfang des bewegten Systems befindet, so wird er folgenden veränderten Zeitablauf gemäß Gl. (I.1) beobachten:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und} \quad t = \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{I.1a}$$

Befindet sich eine Uhr oder ein mit der Zeitkonstanten des μ-Mesons von $\approx 2 \cdot 10^{-6}$ s verlaufender Myonenzerfall im Nullpunkt des bewegten Systems, so folgt, daß sich für den im Nullpunkt des ruhenden Systems befindlichen Beobachter eine längere Zeitspanne $t = t'/\sqrt{1-\beta^2}$ für die Zerfallszeit t' der Myonen, gemessen im bewegten System, ergibt, kurz, daß sich für einen zeitlichen Vorgang im bewegten System ein verlängerter Zeitablauf für den Beobachter im ruhenden System ergibt. (Wäre c nicht begrenzt, sondern unendlich groß, so ergäbe sich $t = t'$.) Das ist die relativistische Zeitdilatation. Sie ist unter anderem der Grund dafür, daß μ-Mesonen trotz ihrer verhältnismäßig kurzen Lebensdauer durch die gesamte Schicht der Atmosphäre bis zur Erdoberfläche dringen können. Wie aus den Gleichungen (I.1) folgt, ist

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2t'^2 = \text{const.}$$

Die drei Komponenten des Impulses in einem System orthogonaler Koordinaten, mit c multipliziert, cp_x, cp_y, cp_z und die Gesamtenergie $U = T + mc^2$ eines Teilchens bilden ebenfalls einen Vierervektor. Hierfür gelten folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} cp'_{x'} &= \frac{cp_x - \beta U}{\sqrt{1-\beta^2}}; & cp_x &= \frac{cp'_{x'} + \beta U'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ cp'_{y'} &= cp_y; & & \\ cp'_{z'} &= cp_z; & & \\ U' &= \frac{U - \beta cp_x}{\sqrt{1-\beta^2}}; & U &= \frac{U' + \beta cp'_{x'}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{I.2}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$c^2p_x^2 + c^2p_y^2 + c^2p_z^2 - U^2 = \text{const.} \tag{I.3}$$

Diese Gleichung zeigt, daß $U^2 - p^2c^2$ nicht vom Koordinatensystem abhängt. Wählt man ein System, in dem der Impuls p des Teilchens Null ist, so folgt, da somit auch $T = 0$ ist, $U = mc^2$. In einem beliebigen Koordinatensystem gilt dann die Beziehung

$$U^2 - c^2p^2 = m^2c^4 = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad U^2 = c^2p^2 + m^2c^4. \tag{I.4}$$

Impuls und Energie eines Teilchens lassen sich als Funktion seiner Geschwindigkeit darstellen. Angenommen, das Teilchen ruhe im bewegten System. Dann kann in Gl. (I.2) $p' = 0$ gesetzt werden. Man erhält

$$p = \frac{m\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und} \quad U = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{I.5}$$

$\beta c = v$ ist die Geschwindigkeit des Teilchens im ersten Bezugssystem. Es sei die Zwei-Teilchen-Wechselwirkung (Streuung) entsprechend Abb. 60 mit relati-

vistischen Beziehungen betrachtet. Der Energiesatz liefert im Laborsystem

$$\sqrt{p^2c^2 + m_1^2 c^4} + m_2c^2 = \sqrt{p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4} + E_2 + m_2c^2;$$

$$\sqrt{p^2 c^2 + m_1^2 c^4} = \sqrt{p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4} + E_2;$$

$$p_1^2 = p^2 + \frac{1}{c^2} E_2 - 2E_2 \frac{1}{c^2} \sqrt{p^2c^2 + m_1^2c^4}.$$

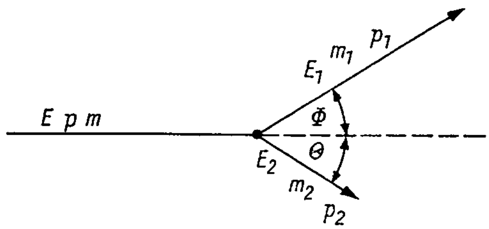


Abb. 60. Teilchenbahnen beim Zusammenstoß von zwei Partnern ($m = m_1$)

Der Impulssatz ergibt

$$p_1^2 = p^2 + p_2^2 - 2pp_2 \cos\Theta;$$

$$E_2 = \sqrt{p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4} - m_2c^2;$$

$$p_2^2 = \frac{1}{c^2} (E_2^2 + 2m_2c^2E_2).$$

Es wird p_1 eliminiert und p_2 durch E_2 ausgedrückt. Man erhält dann

$$E_2 = 2m_2c^2 \frac{p^2c^2 \cos^2\Theta}{[m_2c^2 + (p^2c^2 + m_1^2c^4)^{1/2}]^2 - p^2c^2\cos^2\Theta}.$$

In ähnlicher Weise erfolgt die Errechnung von E_1, der Ausdruck wird jedoch komplizierter. Es ergibt sich

$$E_1 = \frac{Ec^2}{E^2 \sin^2\Phi + 2E(m_1 \sin^2\Phi + m_2)c^2 + (m_1 + m_2)^2c^4}$$
$$\times \Big[m_1 \cos^2\Phi\,(E + 2m_1c^2) - (m_1 - m_2)\,(E + m_1c^2 + m_2c^2)$$
$$+ (E + 2m_1c^2) \cos\Phi \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2\Phi}\Big].$$

Es sei der konkrete Fall $m_1 = m_2 = m$ betrachtet, also die Streuung eines Neutrons an einem Proton oder eines Protons an einem Proton. Dann ergibt sich für E_1 und E_2:

$$E_1 = \frac{2mc^2\, p^2c^2 \cos^2\Phi}{[mc^2 + (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}]^2 - p^2c^2\cos^2\Phi};$$

$$E_2 = \frac{2mc^2p^2c^2 \cos^2\Theta}{[mc^2 + (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}]^2 - p^2c^2\cos^2\Theta}.$$

Hieraus folgt für $pc \ll mc^2$:

$$E_1 \approx \frac{1}{2}\frac{p^2c^2}{mc^2}\cos^2\Phi = E_0\cos^2\Phi;$$

$$E_2 \approx \frac{1}{2}\frac{p^2c^2}{mc^2}\cos^2\Theta = E_0\cos^2\Theta.$$

Das führt zu der bekannten nichtrelativistischen Gesetzmäßigkeit:

$$\cos\Theta = \sin\Phi, \qquad \text{also} \qquad \Theta + \Phi = \frac{\pi}{2}.$$

Ist jedoch $pc \gg mc^2$, so folgt für E_1 und E_2:

$$E_1 \approx 2mc^2\cot^2\Phi;$$

$$E_2 \approx 2mc^2\cot^2\Theta.$$

Weiterhin ist

$$E_1 + E_2 = E_0 \approx pc = \frac{m\beta c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2mc^2(\cot^2\Phi + \cot^2\Theta)$$

oder

$$\cot^2\Phi + \cot^2\Theta = \frac{\beta}{2\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{für} \quad \Phi \quad \text{bzw.} \quad \Theta \neq 0.$$

Man erkennt hieraus, daß $\Theta + \Phi < \pi/2$ ist und mit wachsendem β abnimmt. Bei relativistischen Teilchen, z. B. auch in der kosmischen Strahlung, hat man daher mit wachsender Energie zunehmend nach vorwärts gerichtete Strahlenbündel. Für den einfachen Fall $m_1 = m_2$ läßt sich das, wie man sieht, besonders übersichtlich darstellen; für $m_1 \neq m_2$ ergeben sich kompliziertere und daher weniger leicht überschaubare Ausdrücke, doch ist das Resultat, daß mit wachsender Energie der einfallenden Teilchen in wachsendem Maße nach vorwärts gestreute Teilchen oder Reaktionsprodukte auftreten, dem angeführten Beispiel ähnlich.

Im Zusammenhang mit den relativistischen Erscheinungen ist man vor einer Reihe von Jahren auf die Idee gekommen, zwei Teilchenströme — zunächst sei an Elektronen gedacht — gegeneinander zu richten und damit sehr hohe Energien bei der Wechselwirkung zu erzielen. Betrachtet man Gl. (5.13) für den Stoß zweier Teilchen aufeinander, so sieht man, daß ein großer Teil der Energie dazu verbraucht wird, um der Kinematik zu genügen, d. h., um die Schwerpunktsenergie relativ zum Laboratoriumssystem aufzubringen. Aus den nichtrelativistischen Gleichungen der Kinematik im Schwerpunktsystem (Kap. 5.1) entnimmt man für die Geschwindigkeit des Schwerpunktes $V_2^S = V_1(M_1/M_1 + M_2)$ und für den Fall gleicher Massen $V_2^S = V_1/2$, wo V_1 die Geschwindigkeit des beschleunigten Teilchens im Laborsystem ist. Nach dem Zusammenstoß besteht das System aus zwei Teilchen mit der Masse $2m$. Die Energie, die verbraucht wird, um das Schwerpunktsystem — $2mv_2^S$ — in Bewegung zu setzen, wird demnach

$$E^S = m(V_2^S)^2 = \frac{1}{2}E_1.$$

Es wird also bei zwei massengleichen Stoßpartnern im nichtrelativistischen Falle die Hälfte der Energie des beschleunigten auftreffenden Teilchens zur Bewegung des Schwerpunktsystems verbraucht.

Betrachten wir nun den gleichen Fall — zwei Teilchen gleicher Massen — bei relativistischen Geschwindigkeiten. Im Schwerpunktsystem erhalten wir aus der relativistischen Energiebeziehung $U^2 - p^2c^2 = m^2c^4$, die invariant ist, für die Energie in dem Augenblick, wenn die beiden Teilchen zusammenstoßen, also im Schwerpunkt, $U^2 = m^2c^4$. Wir können demnach für U und pc beliebige Systeme wählen. Hieraus ergibt sich mit $U = U_1 + U_2$ und $p = p_1 + p_2$ (Energie- und Impulssatz), wenn wir der Einfachheit und Übersichtlichkeit halber zentralen Stoß annehmen:

$$U = [(U_1 + U_2)^2 - (p_1 + p_2)^2c^2]^{1/2} =$$

$$= [\underbrace{U_1^2 + p_1^2c^2}_{m_1^2c^4} + \underbrace{U_2^2 - p_2^2c^2}_{m_2^2c^4} + 2(U_1U_2 - p_1p_2c^2)]^{1/2}.$$

Für $m_1 = m_2 = m$ erhält man schließlich

$$U = [2mc^2(U_1 + mc^2)]^{1/2}.$$

Man sieht, daß für gleiche Teilchen bei relativistischem Verhalten der obenstehende Anteil U der Energie im Schwerpunktsystem wesentlich größer als im nichtrelativistischen Falle ist. Das wird besonders deutlich, wenn man zu „überrelativistischen" Geschwindigkeiten übergeht, also wenn $U_1 \gg mc^2$ wird. Aus der obigen Gleichung ergibt sich dann:

$$U \approx [2mc^2U_1]^{1/2} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{U_1}{U} \approx \left[\frac{U_1}{2mc^2}\right]^{1/2}.$$

Mit wachsendem U_1, also mit wachsender Energie des Geschoßteilchens, nimmt die für Teilchenwechselwirkung zur Verfügung stehende Energie nur etwa proportional der Wurzel aus der ihm erteilten Energie zu.

Die hier abgeschätzten hohen kinematischen Energieverluste haben verschiedene Forscher veranlaßt, die Idee aufzugreifen, zwei Teilchenströme gleicher Geschwindigkeit — aus Intensitätsgründen zunächst Elektronen — gegeneinander zu richten. Naturgemäß ist die Trefferwahrscheinlichkeit solcher Teilchen, selbst bei hohen Stromstärken, sehr gering. Um sie zu erhöhen, hat man verschiedene Anordnungen überlegt, bei denen die Teilchen in entgegengesetzter Richtung zirkulieren, z. B. in den Magnetfeldern besonderer Beschleuniger, die eine große Anzahl solcher gegenläufiger Kreisbahnen ermöglichen. Das Verfahren ist insbesondere für Elektronen in Berkeley in Arbeit.

Die Summe entgegengesetzt gerichteter relativistischer Geschwindigkeiten läßt sich unschwer aus den oben angegebenen Gleichungen ermitteln. Durch Differenzieren von

$$t' = \frac{t + \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{und} \qquad x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

nach t und Dividieren von $\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}$ durch $\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}$ ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = v' = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + v}{1 + \frac{\beta}{c}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{v_1 + v}{1 + \frac{v_1 v}{c^2}}\,.$$

In unserem Falle seien die Teilchengeschwindigkeiten v_1 und v gleich groß; es gilt daher

$$v' = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}.$$

Setzen wir aus dem Energiesatz Gl. (I.3) $U = \sqrt{p^2c^2 - 4m^2c^4}$ und für $p = \frac{2mv'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{4mv}{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\sqrt{1-\beta^2}}$ ein, so ergibt sich für U, wenn $pc \gg mc^2$ gewählt wird,

$$U \approx \frac{4m\beta c^2}{(1+\beta^2)\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{2m\beta c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{I.6}$$

Als Beispiel diene folgender Vergleich zwischen direktem Beschuß mit Elektronen einerseits (d. h. das zu treffende Elektron befindet sich vor dem Zusammenstoß in Ruhe im Laboratoriumssystem, und das beschleunigte Teilchen wird mit der kinetischen Energie E auf das ruhende geschossen) und andererseits zwei mit gleicher Geschwindigkeit aufeinander zulaufenden Teilchen. Im ersten Fall erhalten wir für die Wechselwirkungsenergie $E = E_1/2$. Im zweiten Fall finden wir mit $\beta = 0{,}995$ und $2m_e c^2 = 1{,}02$ MeV für E aus der Beziehung

$$E = m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

den Wert

$$E = 0{,}51 \cdot 9 \text{ MeV} = 4{,}6 \text{ MeV}$$

und für U aus Gl. (I.6)

$$U \approx 10{,}2 \text{ MeV}.$$

Ebenso ergibt sich für die derzeit gut erreichbaren Beschleunigungsenergien von Elektronen $\beta^2 = 0{,}9999$, $\beta = 0{,}99995$, $E_e \approx 50$ MeV:

$$U \approx 102 \text{ MeV}.$$

ANHANG II

Zur Lösung der Schrödinger-Gleichung

Die Schrödinger-Gleichung für die Wechselwirkung eines Neutrons mit einem Proton hat ein ähnliches Aussehen wie die für die Lösung der Kepler-Aufgabe, d. h. für die Bewegung eines Teilchens in einem Kraftfeld, dessen Potential proportional $1/r$ ist, also im Falle des Coulomb-Feldes die Form $V(r) = e^2 Z/r$ hat. Da das Potential für die Wechselwirkung zwischen Nukleonen völlig anders aussieht als für elektrische Kräfte — es hat die Form einer Mulde —, schreibt man die Schrödinger-Gleichung in diesem Falle:

$$\Delta \Psi = \frac{M}{\hbar^2} [E - V(r)] \Psi = 0, \tag{II.1}$$

wobei M die halbe Masse eines Nukleons bedeutet. M ist die abgeleitete Masse $M_p M_n/(M_p + M_n)$ von Neutron + Proton. Im folgenden sei jedoch vereinfachend angenommen, daß sich die Massen von Neutron und Proton praktisch nicht voneinander unterscheiden. Schreibt man die Schrödinger-Gleichung in Polarkoordinaten r, Θ, Φ, so wird aus Gl. (II.1)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta^2} + \frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}\frac{\partial \psi}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \Phi^2}\right\} + \frac{M}{\hbar^2}[E - V(r)]\psi = 0. \tag{II.2}$$

Diese Differentialgleichung läßt sich in ein Produkt zweier Funktionen trennen, von denen die eine nur von r, die andere nur von Θ und Φ abhängt:

$$\psi(r, \Theta, \Phi) = f(r)\, g(\Theta, \Phi).$$

Man erhält nach Division durch fg

$$\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{rf}\frac{df}{dr} + \frac{1}{r^2 g}\cdot\left\{\frac{d^2 g}{d\Theta^2} + \frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}\frac{dg}{d\Theta} + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{d^2 g}{d\Phi^2}\right\} + \frac{M}{\hbar^2}[E - V(r)] = 0.$$

Die Summe der nur f und g enthaltenden Glieder ist Null, was nur dann der Fall sein kann, wenn beide Anteile gleich und durch dieselbe Konstante gegeben sind. Der winkelabhängige Teil der Funktion liefert als Lösung die Legendreschen Kugelfunktionen:

$$g(\Theta, \Phi) = P_l^m (\cos\Theta)^{\mathrm{i}m\varphi},$$

deren Werte für die trigonometrischen Polynome folgende sind:

$$P_0(\cos\Theta) = 1;\ P_1(\cos\Theta) = \cos\Theta;\ P_2(\cos\Theta) = \frac{1}{4}(3\cos 2\Theta + 1);\ \ldots$$

bzw.

$$P_1^1(\cos\Theta) = \sin\Theta;\quad P_2^1(\cos\Theta) = \frac{3}{2}\sin 2\Theta;\ldots$$

Bei Problemen der Streuung ist im allgemeinen — wenn man z. B. von Polarisationserscheinungen absieht — die Funktion g nur von Θ abhängig.

Die Radialfunktion $f(r) = R(r)$ genügt der Gleichung

$$\frac{d^2R_l}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR_l}{dr} + \frac{M}{\hbar^2}[E - V(r)]R_l = \frac{l(l+1)}{r^2}R_l, \tag{II.3}$$

wobei $l(l+1)$ die Konstante ist, der die beiden von r bzw. Θ, Φ abhängigen Gleichungen gleich sind. l kann nur ganzzahlige Werte annehmen. Setzt man in der obenstehenden Gleichung $R_l = u_l/r$, so erhält man

$$\frac{d^2u_l}{dr^2} + \frac{M}{\hbar^2}[E_l - V(r)]u_l - \frac{l(l+1)}{r^2}u_l = 0. \tag{II.4}$$

Wie man sieht, hat man für jeden einzelnen Wert von l eine derartige Differentialgleichung zu lösen. l ist die Quantenzahl des Bahndrehimpulses. $V(r)$ ist jeweils der Aufgabe entsprechend zu wählen. Oftmals genügt es, eine rechteckige Potentialmulde mit der Tiefe V und der Breite r_0 zu wählen. Setzt man $u = u(r)\,e^{ikr}$, so erhält man

$$\frac{d^2u}{dr^2} + 2ik\frac{du}{dr} - u\left[V(r)\frac{\hbar^2}{M} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right] = 0.$$

Entsprechend der Beziehung $1/\lambda = k = \sqrt{ME}/\hbar$ wurde $ME/\hbar^2$ durch k^2 ersetzt. Da für große r die Funktion u fast konstant wird, ergibt sich

$$d^2u/dr^2 \ll k\,du/dr.$$

Man erhält dann

$$2ik\ln u = \int_r \left[V(r)\frac{\hbar^2}{M} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]dr.$$

Das Integral auf der rechten Seite der Gleichung wird nur dann für $r \to \infty$ einem endlichen Wert zustreben, wenn sich dabei $V(r)$ schneller als mit $1/r$ verringert. Für einen derartigen Fall erhält man als Partiallösung der Radialgleichung

$$u = C \cdot \frac{1}{r}\sin(kr + \varepsilon).$$

ANHANG III

Zur Berechnung der Transportweglängen von Neutronen

Abbildung 33 verdeutlicht die Berechnung der Transportweglänge für Neutronen. Wie man dort sieht, beträgt der Weg, den das Neutron längs der aufeinanderfolgenden Strecken zurücklegt,

$$r = \lambda_0 + \lambda_1 \cos\Theta_1 + \lambda_2 \cos\Theta_1 \cos\Theta_2 + \cdots.$$

Durch Mittelung erhält man, wie in Kap. 7.2. (Gl. 7.9) dargestellt wurde:

$$\lambda_{tr} = \lambda[1 + \overline{\cos\Theta} + \overline{\cos^2\Theta} + \overline{\cos^3\Theta} + \cdots] = \frac{\lambda}{1 - \overline{\cos\Theta}}.$$

Bei dieser Rechnung ist vorausgesetzt, daß die Wahrscheinlichkeit für eine Streuung nicht vom Azimutalwinkel abhängt. Die Berechnung von $\overline{R^2}$, dem Quadrat des mittleren Abstandes, den ein Neutron gegebener Energie im Bremsmedium zurücklegen muß, wenn es mit höherer Energie von einer punktförmigen Neutronenquelle emittiert wird, wird folgendermaßen durchgeführt: Wie aus Abb. 33 ersichtlich, ist

$$R_1^2 = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + 2\lambda_0\lambda_1 \cos\Theta_1.$$

Für zahlreiche Stöße folgt:

$$R^2 = \sum_j r_j^2 + \sum_{j \neq k} r_j r_k$$

und

$$\overline{R^2} = n\overline{r_j^2} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \overline{2 r_j r_k \cdot \cos\Theta_{jk}}.$$

Aus den Sätzen über Mittelwerte folgt:

$$\overline{r_j r_k \cos\Theta_{jk}} = \overline{r_j}\,\overline{r_k}\,\overline{\cos\Theta_{jk}}$$

sowie die Rekursionsformel

$$\overline{\cos\Theta_{jk}} = \overline{\cos\Theta \cdot \cos\Theta_{j(k-1)}}.$$

Da die einzelnen Ablenkwinkel Θ voneinander unabhängig sind, gilt

$$\overline{\cos\Theta_{jk}} = \overline{\cos\Theta}^{k-j}.$$

Somit erhält man

$$\overline{R^2} = n(\overline{r_j^2}) + (n-1)\,2\,(\overline{r_j^2})\left[\overline{\cos\Theta} + (\overline{\cos\Theta})^2 + (\overline{\cos\Theta})^3 + \cdots\right];$$

$$\overline{R^2} \approx \frac{2n}{1 - \overline{\cos\Theta}}\,\lambda^2.$$

Hieraus folgt

$$\overline{R^2} = \frac{1}{1 - \cos\Theta} \cdot 2\left(\frac{1}{\xi}\ln\frac{E_0}{E}\right)\lambda^2,$$

was mit Gl. (7.12) übereinstimmt. Ist λ eine schwach von E abhängige Funktion, so ergibt sich Gl. (7.11):

$$\overline{R^2} = \frac{2}{(1 - \cos\Theta)\,\xi}\int\limits_{E}^{E_0} \lambda^2(E)\,\frac{\mathrm{d}E}{E}.$$

Diese Gleichung ist nicht genau, insbesondere für leichte Bremsmaterialien (Wasserstoff). Jedoch ergibt die genauere Rechnung recht umständliche Ausdrücke.

ANHANG IV

Polarisation von Nukleonen

Obwohl die Beschreibung der Polarisationserscheinungen recht tief in das Gebiet der theoretischen Kernphysik hineinreicht, erscheint es zweckmäßig, dem Physiker wenigstens einige anschaulich dargestellte Grundlagen dieses interessanten und wichtigen Phänomens zu vermitteln. Die „Polarisation" von Nukleonen umfaßt Vorgänge, die mit der Ausrichtung der Spins verbunden sind. Der nichtzentrale Anteil der Kernkräfte führt zu einer starken Abhängigkeit der Nukleon-Kern-Wechselwirkung vom gesamten Moment des Systems der Nukleonen. Insbesondere haben Niveaus, die sich durch die Spinorientierung relativ zum Drehmoment (l, s) unterscheiden, Energieunterschiede von einigen MeV. Infolgedessen ist die Abhängigkeit der Kernkräfte von der Orientierung des Spins relativ zur Bahn von derselben Größenordnung wie die Abhängigkeit der Kräfte von der Orientierung der Spins, z. B. Singulett- und Triplettzustand des Deuterons.

Spin-Bahn-Kopplungen zeigen sich auch bei elastischer Streuung sowie bei Kernreaktionen. Sie führen bei leichten Kernen zu Resonanzerscheinungen, die durch verschiedene Orientierungen von l zu s im Zwischenkern bedingt sind. Als wichtige Folge der (l, s)-Wechselwirkung tritt bei Kernreaktionen eine azimutale Asymmetrie in der Winkelverteilung der Reaktionsprodukte oder der gestreuten Nukleonen auf, die also letztlich eine Folge der Polarisation ist.

Die Komponenten des Spins in irgendeiner Richtung, nehmen wir die z-Achse an, können nur die Werte $S_z = \pm 1/2$ annehmen. Die z-Achse soll sich in physikalischer Hinsicht von den anderen Komponenten unterscheiden, also beispielsweise die Richtung eines äußeren (magnetischen) Feldes haben. Im allgemeinen wird man die z-Richtung mit der des Kerndrehmomentes l zusammenfallen lassen.

Einen Teilchenstrahl bezeichnet man als polarisiert, wenn die Anzahl $n\uparrow$ der Teilchen mit $S_z = +1/2$ von der Anzahl $n\downarrow$ derer mit $S_z = -1/2$ verschieden ist. Als Polarisationsgrad in der Richtung z bezeichnet man den Wert

$$P_z = \frac{n\uparrow - n\downarrow}{n\uparrow + n\downarrow} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}. \tag{VI.1}$$

Auf die Möglichkeit der Polarisation schneller Nukleonen bei der Streuung nichtpolarisierter Teilchen an einem nichtpolarisierten Targetkern machte zuerst (1946) SCHWINGER aufmerksam. Die Grundlagen für die quantenmechaniche Theorie der Polarisation schneller Nukleonen wurde durch WOLFENSTEIN, LEPORE und DALITZ in den Jahren 1949—1952 erarbeitet. Im folgenden soll nur der einfachste Fall der Polarisation, wie er bei der Streuung von Teilchen mit dem Spin 1/2 an Kernen mit dem Spin 0 auftritt, betrachtet werden.

Gl. (IV.1) bezieht sich auf die Polarisation in *einer* Richtung z. Da jedoch bei der räumlichen Orientierung der Spinvektoren auch Komponenten in der x- und y-Richtung vorhanden sein können, schreibt man den Vektor der Polarisation in der allgemeinen Form

$$\boldsymbol{P} = P_x \cdot \boldsymbol{n}_x + P_y \cdot \boldsymbol{n}_y + P_z \cdot \boldsymbol{n}_z .$$

$\boldsymbol{n}_x$, $\boldsymbol{n}_y$ und $\boldsymbol{n}_z$ sind die Einheitsvektoren in den drei Koordinatenrichtungen, während P_x, P_y und P_z skalare Größen sind.

Betrachten wir nun den oben erwähnten konkreten Fall. Das Teilchen habe den Spin 1/2 und werde an einen Kern, der den Spin 0 hat, gestreut. Die Richtung des einfallenden (Anfangs-)Strahles sei durch den Vektor $\boldsymbol{k}_0$ bestimmt (Abb. 61), die Richtungen der nach links und nach rechts gestreuten Strahlen entsprechend mit $\boldsymbol{k}_l$ und $\boldsymbol{k}_r$. Die Streuung am ersten Kern ergebe eine vollständige Polarisation, d. h., die Streuung finde mit merkbarem Streuquerschnitt nur dann statt, wenn die Richtungen der Spins $\boldsymbol{S}$ und die Normale $\boldsymbol{n}_1$ der Streuebene parallel sind. Das ist jedoch nur ein Idealfall, der die Betrachtungen erleichtert. In der Realität wird eine derartige 100%ige Polarisation kaum zu finden sein. Während die einfache Streuung achsialsymmetrisch ist, also nicht vom Azimutwinkel φ abhängt, gilt das nicht mehr für die hier betrachtete Zweifachstreuung, bei der der zweite

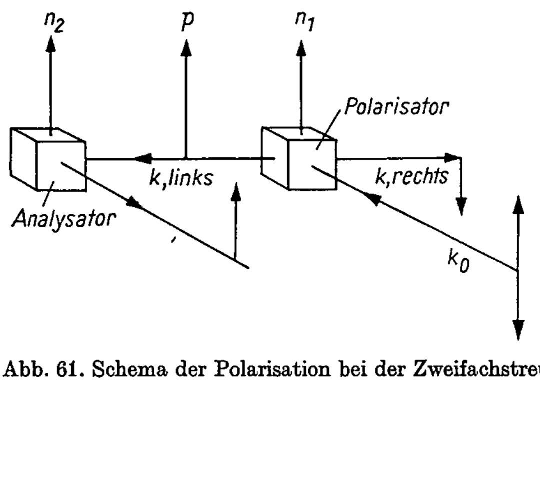


Abb. 61. Schema der Polarisation bei der Zweifachstreuung (nach FAISSNER)

Streuer als Analysator dient. Hier tritt eine „links-rechts-Asymmetrie" auf, unter der obigen idealisierenden Annahme sogar eine links-rechts-Asymmetrie, wo die Streuung nur nach einer Seite (nach links) auftritt. Umgekehrt mißt man den Grad der Polarisation dadurch, daß man die Intensitäten der Streuung nach links und nach rechts registriert und dann P nach der Beziehung (IV.1) bestimmt.

Im Falle der Bestimmung unvollständiger Polarisation am ersten Streuer und unvollständiger Polarisation am zweiten (Analysator-)Streuer erhält man, wenn σ_+ und σ_- die Streuquerschnitte am Analysator und N_+ sowie N_- die entsprechenden Streuintensitäten nach der ersten Streuung sind, nach H. FAISSNER ein übersichtliches Schema (Tab. 27).

Tabelle 27. Intensitäten bei der Zweifachstreuung

Streurichtung	Spinrichtung	Anzahl der Teilchen	
links	nach oben nach unten	$N_+\sigma_+$ $N_-\sigma_-$	N_{links}
rechts	nach oben nach unten	$N_+\sigma_-$ $N_-\sigma_+$	N_{rechts}

Das Verhältnis der Intensitäten der nach links und der nach rechts gestreuten Strahlen ergibt sich demnach zu

$$V = \frac{N_{\text{links}}}{N_{\text{rechts}}} = \frac{N_+\sigma_+ + N_-\sigma_-}{N_+\sigma_- + N_-\sigma_+}.$$

Durch einfache Umformung erhält man

$$V = \frac{(N_+ + N_-)(\sigma_+ + \sigma_-) + (N_+ - N_-)(\sigma_+ - \sigma_-)}{(N_+ + N_-)(\sigma_+ + \sigma_-) - (N_+ + N_-)(\sigma_+ + \sigma_-)}.$$

Mit Hilfe der Beziehungen für die Polarisation am Streuer und am Analysator, $P_1 = (N_+ - N_-)/(N_+ + N_-)$ bzw. $P_2 = (\sigma_+ - \sigma_-)/(\sigma_+ + \sigma_-)$, erhält man

$$V = \frac{1 + P_1P_2}{1 - P_1P_2}.$$

An Stelle von V verwendet man gewöhnlich die Asymmetrie ε:

$$\varepsilon = \frac{N_{\text{links}} - N_{\text{rechts}}}{N_{\text{links}} + N_{\text{rechts}}} = P_1P_2.$$

Soweit die einfachsten Beziehungen zur Kennzeichnung der Polarisationserscheinungen. Insbesondere für die Streuung bei sehr hohen Energien, z. B. (p—p)-Streuung, die von SEGRÉ und seinen Mitarbeitern eingehend behandelt wurde, spielen die Polarisationsmessungen eine wichtige Rolle. Da bei höheren Teilchenenergien eine größere Anzahl von Drehimpulswerten bei der Streuung zu berücksichtigen (etwa bis zu $l = 4$) und für jeden Wert des Drehimpulses eine Differentialgleichung (Schrödinger-Gleichung) zu lösen ist, bietet die Deutung der

differentiellen Streuquerschnitte für die genannten Energien erhebliche Schwierigkeiten. Es sind die Intensitäten und Phasenwinkel für die einzelnen l-Werte aus den gemessenen Streuquerschnitten zu analysieren. Bei dieser Aufgabe bietet die Polarisation bei der Mehrfachstreuung — Zweifach- und Dreifachstreuung sowie die Spinkorrelation für gestreute und gestoßene Protonen — wesentliche zusätzliche Hilfsmittel zur Entwirrung der komplizierten Kernspektren.

ANHANG V

Wirkungsquerschnitte inverser Reaktionen. Prinzip des detaillierten Gleichgewichts. Parität der π-Mesonen

Aus der klassischen und der Quantenmechanik ist bekannt, daß für zahlreiche Prozesse Invarianz gegenüber Zeitumkehr (Ersetzen von t durch $-t$) besteht. Aus dieser Invarianz läßt sich eine Reihe wichtiger Gesetzmäßigkeiten für das Verhältnis von Kernreaktionen zu ihrer Umkehrreaktion bestimmen. Im Gleichgewicht erfolgen die Reaktionen gleich häufig in beiden Richtungen:

$$\mathrm{A} + \mathrm{a} \leftrightarrows \mathrm{C} \leftrightarrows \mathrm{B} + \mathrm{b}.$$

Aus den Betrachtungen der verschiedenartigen Typen von Kernreaktionen in Kap. 10.4. folgte für den Querschnitt σ:

$$\sigma_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \frac{1}{\pi \hbar^4} |\Omega H|^2 \frac{p_{\mathrm{b}}^2}{v_{\mathrm{a}} v_{\mathrm{b}}}.$$

Für die inverse Reaktion folgt als Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} = \frac{1}{\pi \hbar^2} |\Omega H|^2 \frac{p_{\mathrm{a}}^2}{v_{\mathrm{a}} v_{\mathrm{b}}}.$$

Die Größe $|\Omega H|^2$ ist in beiden Fällen gleich, da für die Anregung ein Hermitescher Operator gilt:

$$\left|\int \psi_{\mathrm{B}}^* H \psi_{\mathrm{A}}\, \mathrm{d}\tau\right| = \left|\int \psi_{\mathrm{A}}^* H \psi_{\mathrm{B}}\, \mathrm{d}\tau\right| .$$

Ohne Berücksichtigung der Spins erhält man demnach (wobei wir der Darstellung durch Fermi gefolgt sind)

$$\frac{\sigma_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}}{\sigma_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}} = \frac{p_{\mathrm{b}}^2}{p_{\mathrm{a}}^2}.$$

Zur weiteren Behandlung des vorliegenden Problems betrachten wir die miteinander reagierenden Kerne A und a sowie ihre Endprodukte B und b; sie seien in einem Kasten eingeschlossen. Enthält dieses Volumen eine beliebige Anzahl der Teilchen aller vier Sorten, so finden darin die Übergänge $\mathrm{A} + \mathrm{a} \leftrightarrows \mathrm{B} + \mathrm{b}$ statt. Nach den Gesetzen der Statistik haben sämtliche Zustände, die mit der

gegebenen Energie vereinbar sind, gleiche Wahrscheinlichkeit. Bezeichnen wir den Zustand der beiden Teilchen A + a als Zustand A und entsprechend den der Teilchen B + b als Zustand B, so kann man die im Energieintervall besetzten Zustände in die beiden Typen A und B aufteilen. Da alle Zustände im Intervall ΔE gleiche Wahrscheinlichkeit haben, gilt die Beziehung

$$\frac{\text{Zahl der besetzten Zustände } A}{\text{Zahl der besetzten Zustände } B} = \\ = \frac{\text{Zahl der im Intervall } \Delta E \text{ möglichen Zustände } B}{\text{Zahl der im Intervall } \Delta E \text{ möglichen Zustände } A}.$$

Die Anzahl der möglichen Zustände A ist gleich der maximalen Zahl der Paare A + a, multipliziert mit der Zahl der Zustände für ein Paar im Intervall ΔE. Das ergibt den Wert

$$\eta = \frac{4\pi p_a^2 \Omega}{(2\pi\hbar)^3 \cdot v_a},$$

wo η die maximale Zahl der Paare (A + a) bedeutet, die aus der Zahl der im Kasten befindlichen Teilchen gebildet werden kann. Ähnlich ist die Zahl der möglichen Zustände B:

$$\eta = \frac{4\pi p_b^2 \Omega}{(2\pi\hbar)^3 v_b}.$$

Demnach ergibt sich

$$\frac{\text{Zahl der besetzten Zustände } A}{\text{Zahl der besetzten Zustände } B} = \frac{p_a^2 v_b}{p_b^2 v_a}. \tag{V.1}$$

Im Zustand des Gleichgewichts ist die Anzahl der Übergänge $A \to B$ pro Zeiteinheit gleich der Zahl der inversen Übergänge $B \to A$. Man erhält dann

Zahl der Übergänge $A \to B$ pro 1 s = (Zahl der besetzten Zustände A) $\times\ \sigma_{A\to B} v_a$;

Zahl der Übergänge $B \to A$ pro 1 s = (Zahl der besetzten Zustände B) $\times\ \sigma_{B\to A} v_b$.

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$\frac{\sigma_{B\to A} v_b}{\sigma_{A\to B} v_a} = \frac{p_a^2 v_b}{p_b^2 v_a},$$

also dasselbe Resultat wie in Gl. (V.1).

Wenn wir die Spins der Teilchen in Rechnung setzen, vergrößert sich die Zahl der Zustände. Wenn die entsprechenden Werte der Spins mit J_A, J_a, J_B und J_b bezeichnet werden, so vergrößert sich die Dichte der Zustände A um den Faktor $(2J_A + 1)(2J_a + 1)$, analog für die Zustände B, deren Zahl sich um den Faktor $(2J_B + 1)(2J_b + 1)$ vergrößert. Dann wird die Intensität des Überganges $A \to B$ proportional zu

$$(2J_A + 1)(2J_a + 1)\, p_a^2 \sigma_{A\to B}$$

und für den Übergang $B \to A$

$$(2J_B + 1)(2J_b + 1)p_b^2 \sigma_{B\to A}.$$

Man erhält also

$$(2J_A + 1)(2J_a + 1)p_a^2 \sigma_{A\to B} = (2J_B + 1)(2J_b + 1)p_b^2 \sigma_{B\to A}. \qquad (V.2)$$

Das ist die Gleichung des „Reziprozitätsgesetzes" für Kernreaktionen. Diese Beziehung für die Wirkungsquerschnitte zueinander inverser Kernreaktionen ist experimentell für eine Reihe von Reaktionen bestätigt worden.

Interessant ist, daß dieses Gesetz gestattet, unbekannte Spins zu bestimmen. Als Beispiel sei die Bestimmung des Spins für das π-Meson angeführt. Der Rechnung liegt die Reaktion

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \pi^+ + {}_1^2\mathrm{H}$$

zugrunde. Es ist eine Zwei-Teilchen-Reaktion, deren Energieverhältnisse eindeutig bestimmbar sind. Die Umkehrreaktion wurde mit einem Strahl von π^+-Mesonen ausreichender Energie untersucht:

$$\pi^+ + {}_1^2\mathrm{H} \to \mathrm{p} + \mathrm{p}.$$

Das Reziprozitätsgesetz (Gl. V.2) liefert für diese Prozesse folgende Beziehungen:

$$(2S_p + 1)^2 p_p^2 \frac{d\sigma_{pp}(\Theta)}{d\omega} = (2J_{{}_1^2H} + 1)(2S_\pi + 1)p_\pi^2 \frac{d\sigma_{\pi {}_1^2H}(\Theta)}{d\omega}.$$

p_p ist der Impuls des Protons bei der direkten (p, p)-Reaktion im Schwerpunktsystem, p_π der Impuls des π^+-Mesons bei der umgekehrten (π^+, ${}_1^2$H)-Reaktion, S_p, S_π und $J_{{}_1^2H}$ sind entsprechend die Spins des Protons, des π-Mesons und des Deuterons. Für S_π folgt aus Gl. (V.2):

$$S_\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\frac{p_p^2}{p_\pi^2}\frac{\dfrac{d\sigma_{pp}(\Theta)}{d\omega}}{\dfrac{d\sigma_{\pi {}_1^2H}(\Theta)}{d\omega}} - 1\right).$$

Den totalen Querschnitt erhält man nach Integration über alle Winkel.

Die Messung des Wirkungsquerschnittes der Reaktion p + p wurde mit Protonen einer Energie von 340 MeV durchgeführt. Der Vergleich der bei dieser Reaktion gefundenen differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitte mit denen bei der Reaktion $\pi^+ + {}_1^2\mathrm{H} \to \mathrm{p} + \mathrm{p}$ mit einer Energie der π^+-Mesonen von 25 MeV führte zu dem Resultat, daß $S_{\pi^+} = 0$ ist. Der Spin des π^+-Mesons ist also Null.

Parität der π-Mesonen

Besonders übersichtlich läßt sich die Bestimmung der Parität am Beispiel der π^--Mesonen darstellen. Sie sei deshalb hier angeführt. Bei langsamen π^--Mesonen kommt folgende Reaktion zustande: $\pi^- + {}_1^2\mathrm{H} \to \mathrm{n} + \mathrm{n}$.

Der Einfang langsamer π^--Mesonen geschieht im S-Zustand ($l = 0$). Daher ergibt sich als Gesamtdrehimpuls des Systems $\pi^- + {}^2_1\mathrm{H}$

$$J_{\pi^- {}^2_1\mathrm{H}} = S_\pi + J_{{}^2_1\mathrm{H}} + l_\pi = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Für die Parität erhält man

$$P_{\pi^- {}^2_1\mathrm{H}} = P_{\pi^-} \cdot P_{{}^2_1\mathrm{H}} (-1)^{l_\pi} = P_{\pi^-} \cdot 1 \cdot 1 = P_{\pi^-},$$

da $l_\pi = 0$ ist.

Entsprechend dem Satz von der Erhaltung der Parität soll das System von 2 Neutronen, das auf der rechten Seite der Reaktionsgleichung steht, denselben Drehimpuls und dieselbe Parität besitzen wie $\pi^- + {}^2_1\mathrm{H}$. Es ergibt sich

$$J_{\mathrm{nn}} = S_\mathrm{n} + S_\mathrm{n} + l_\mathrm{n} = 1;$$

$$P_{\mathrm{nn}} = P_\mathrm{n}^2 (-1)^{l_\mathrm{n}} = P_{\pi^-}.$$

Nimmt man an, daß sich die in der Reaktion gebildeten Neutronen im S-Zustand befinden ($l = 0$), so müssen sie nach dem Pauli-Prinzip entgegengesetzt gerichtete Spins haben (identische Teilchen), und ihr Gesamtdrehimpuls ergibt sich zu

$$J_{\mathrm{nn}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0 \neq J_{\pi^- {}^2_1\mathrm{H}}.$$

Daher können sich die Neutronen nicht im S-Zustand befinden. Werden die Neutronen im p-Zustand gebildet ($l_\mathrm{n} = 1$), so ist das Gesetz der Erhaltung des Gesamtdrehimpulses erfüllt, und ein Betrag $l_\mathrm{n} = 1$ kann zur Bestimmung der Parität des π^--Mesons dienen:

$$P_{\pi^-} = (-1)^{l_\mathrm{n}} = -1.$$

Andere Werte des Bahndrehimpulses ($l_\mathrm{n} \geqq 2$) erfüllen nicht die Erhaltungssätze. Das π^--Meson besitzt daher die Parität -1.

ANHANG VI

Relativistische Geschwindigkeiten der Teilchen im Zyklotron

Aus der Energiegleichung $U^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$ folgt

$$p = mv = \frac{[U^2 - m_0^2c^4]^{1/2}}{c} = \frac{[T(T + 2m_0c^2)]^{1/2}}{c}.$$

In die Zyklotron-Gleichung $mv = eBR$ eingesetzt, erhält man als Bahnradius im Magnetfeld $R = \frac{[T(T + 2m_0c^2)]^{1/2}}{ceB}$. Für T und m_0c^2 im Maßstab MeV ge-

messen und für B in Kilogauß erhält man

$$R = \frac{[T(T + 2m_0c^2)]^{1/2}}{30B} \text{ Meter.}$$

Für die kinetische Energie T von relativistischen Teilchen ergibt sich

$$T^2 + 2Tm_0c^2 = c^2e^2B^2R^2.$$

Für $m_0c^2 \ll T$, also für sehr hohe Energien, kann die Ruhenergie m_0c^2 vernachlässigt werden; dann ist

$$T \approx ceBR.$$

Man sieht, daß für relativistische Energien die mit wachsendem R und B erreichbaren Energien T nicht mehr proportional den Quadraten dieser Größen sind, sondern nur noch linear mit B und R zunehmen. Für verschiedene Teilchen und Energien berechnete LIVINGSTON die Radien R der notwendigen Magnetfelder (Tab. 28).

Tabelle 28. Bahnradius R (in Metern) verschiedener Teilchen im Magnetfeld des Zyklotrons $B = 10^4$ Gauß

T MeV	Elektronen	Protonen	Deuteronen	α-Teilchen
1	0,0047	0,144	0,204	0,144
10	0,035	0,457	0,646	0,454
100	0,334	1,48	2,06	1,45
1000	3,33	5,64	7,26	4,85
10000	33,3	36,3	39,0	22,0

Aus den Daten für Elektronen sieht man, daß bereits für verhältnismäßig geringe Energien ($\approx$ 10 MeV) die Proportionalität zwischen T und R erfüllt ist.

ANHANG VII

Konstanten der Atomphysik

	MeV	ME	Ws	kg
1 MeV	1	$1{,}07 \cdot 10^{-3}$	$1{,}602 \cdot 10^{-13}$	$1{,}783 \cdot 10^{-30}$
1 ME	931,44	1	$1{,}49 \cdot 10^{-10}$	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$
1 Ws	$6{,}24 \cdot 10^{12}$	$6{,}71 \cdot 10^{9}$	1	$1{,}11 \cdot 10^{-17}$
1 kg	$5{,}61 \cdot 10^{29}$	$6{,}025 \cdot 10^{26}$	$8{,}99 \cdot 10^{16}$	1

	Elektron	Proton	Neutron
Ladung, C	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$	0
Masse, kg	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$	$1{,}672 \cdot 10^{-27}$	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$
Atomgewicht A	$0{,}55 \cdot 10^{-3}$	1,007825	1,008665
Ruhenergie, MeV	0,511	938,26	939,04

Plancksche Konstante $\hbar = 6{,}582 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{MeV\,s} = 1{,}0545 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{erg\,s}$

Klassischer Elektronenradius $r_e = \dfrac{e^2}{m_e c^2} = (2{,}8178\ \mathrm{fermi}) = 2{,}8178 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{cm}$

Compton-Wellenlänge $\lambda\!\!\!^{-}_e = \dfrac{\hbar}{m_e c} = r_e \cdot a^{-1} = 3{,}8614 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{cm}$

Feinstrukturkonstante $a = \dfrac{e^2}{\hbar c} = 1/137{,}039$

Boltzmann-Konstante $k = 8{,}6171 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{MeV/grd}$

Loschmidtsche Zahl $N = 6{,}02252 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$ (für $^{12}\mathrm{C} = 12$)

Bohrsches Magneton

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2 m_e c} = (0{,}5788 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{MeV/G}) = 0{,}5788 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{MeV/T}$$

Kernmagneton

$$\mu_K = \frac{e\hbar}{2 M_p c} = (3{,}1524 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{MeV/G}) = 3{,}1524 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{MeV/T}$$

De-Broglie-Wellenlänge für Teilchen der Ruhmasse m und der kinetischen Energie E:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{E^2 + 2mc^2E}} = \frac{1{,}24 \cdot 10^{-4}}{[E^2 + 2mc^2E]^{1/2}};\ (\lambda \text{ in cm}; E \text{ und } mc^2 \text{ in eV}).$$

LITERATUR

Zum weiteren Studium werden folgende Lehrbücher und Monographien empfohlen:

HERTZ, G.: Lehrbuch der Kernphysik. B. G. Teubner, Leipzig.
Bd. I: Experimentelle Verfahren, 1966
Bd. II: Physik der Atomkerne, 1960
Bd. III: Angewandte Kernphysik, 1962.

GRIMSEHL, E.: Lehrbuch der Physik, Bd. IV: Artikel von P. KUNZE, Kernphysik. B. G. Teubner, Leipzig 1968.

BLATT, J. M., und V. F. WEISSKOPF: Theoretische Kernphysik. B. G. Teubner, Leipzig 1959.

DAWYDOW, A. S.: Theorie des Atomkerns. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963.

DZELEPOW, B. S., G. I. SELZER, A. I. BAS und J. A. SMORODINSKIJ: Der Isospin. Akademie-Verlag, Berlin 1960.

BALDIN, A. M., V. I. GOLDANSKI und I. A. ROSENTAL: Kinematik von Kernreaktionen. Akademie-Verlag, Berlin 1963.

WALTER, A. K.: Elektrostatische Generatoren. Akademie-Verlag, Berlin 1963.

BIRJUKOW, W. A., M. M. LEBEDEW und A. M. RYSKOW: Das Vereinigte Institut für Kernforschung in Dubna. Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1960.

SACHVERZEICHNIS